

±J イジングモデルのレプリカ数に関する相転移と零点

小淵 智之^{1,A}, 樺島祥介^B, 西森秀稔^A

^A東京工業大学大学院理工学研究科, ^B東京工業大学大学院総合理工学研究科

1 はじめに

不規則系の統計力学がその適用範囲を広げ、情報科学の問題へと拡張されていくその原動力となった技法を一つ上げるとすれば、やはりレプリカ法であろう。レプリカ法は汎用性の高い強力な解析技法であり、具体的な手順が系統的に整備されているため、多くの系に適用され成果をあげてきた [1]。しかしその一方で、レプリカ法の手順それ自体を鑑みてみると、その意味がよくわからないところも多い。最も顕著なものはレプリカ対称性 (RS) とその破れ (RSB) である。レプリカ法では、RSB が発生した場合の対処方法は Parisi によって与えられているものの [2, 3]、その具体的なメカニズムの詳しいところは不明であり、RSB 解の複雑で技巧的な構成法と相まって、物理的、直感的な解釈が非常に働きにくい。本稿では、これらレプリカ法に付随する問題について焦点をあてる²。

まず最初に、レプリカ法の具体的な手順を復習し、それと RSB がどのように関連しているかを考えよう。この際、次の母関数 $g(n)$ を考えると便利である。

$$g(n) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(n), \quad (1)$$

$$g_N(n) \equiv \frac{1}{N} \log[Z^n], \quad (2)$$

ここで n はレプリカ数、 $[\dots]$ はランダムネスに対する配位平均である。この表式において、 $g_N(n), g(n)$ は明らかに任意の複素数の n に対して定義できる。また、自由エネルギーはレプリカ法の恒等式を通じて $g_N(n)$ から次のように計算される。

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} [\log Z] = - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} g_N(n). \quad (3)$$

一般に、実数の n について $g_N(n)$ を計算するのは困難である。そこで通常のレプリカ法の処方箋は、 n を自然数として計算し、最終的な結果において解析接続を行うことによって $n \rightarrow 0$ 極限を達成する。この際に次の2つのことが問題となる。

1. 自然数から実数への解析接続の一意性
2. 極限 $N \rightarrow \infty$ と $n \rightarrow 0$ の可換性

前者は、 $[Z^n]$ を全ての自然数 n について計算しても、実数の n に $[Z^n]$ を一意に解析接続することが一般には不可能であるという事実と関係している³。しかし、今回我々が扱う ±J モデルについては N が有限である限り、解析接続を一意に決めることができるのでこの問題は有意ではない。本質的なのは後者の問題である。レプリカ法を用いて自然数の n に対してモーメントを計算するといっても、任意の N に対してそれを

¹E-mail: obuchi@stat.phys.titech.ac.jp

²最近、SK モデルに対して Parisi 解が正しいことが証明された。文献は [4]。

³カールソンの定理 [5] の十分条件を満たす場合には、これが可能であり、±J モデルはそれを満たすが SK モデルの場合は満たされない。van Hemmen と Palmer は RS 解が SK モデルで破綻するのはそれが原因で、別の接続解が SK モデルのモーメントを正しく記述すると予想したが [6]、現在では、この予想は的外れしていることが分かっている [7]。

行うのは一般には不可能なために、通常は $N \rightarrow \infty$ の漸近的な性質のみを鞍点法などで議論する。式で書くと

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} g_N(n) = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} g(n) \quad (4)$$

となり、熱力学極限をあらかじめとった $g(n)$ を自然数の n に対して評価し、最後に解析接続するというのが結局、レプリカ法の手続きの全容である。ここで重要なことは $g_N(n)$ は n に関して解析的な関数だが、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ をとった $g(n)$ はそうであるとは限らないということである。この解析性の破れがひとたび起これば、真の $g(n)$ 自身が解析関数で無くなっているため、RS 解を解析性を頼りに延長した解は当然誤った結果を与えることとなる。これは通常の相転移と同じメカニズムであり、このような場合には $g(n)$ を単一の解析関数で表現することは不可能になるため、 n の含まれている領域によって異なる解(相)を適切に構成して選択してやるが必要となる。

このような見方に立てば、RSB を含めた $g(n)$ の振る舞いを通常の統計力学における相転移と同等に扱うことができる。従って相転移・臨界現象の研究で培われた統計力学の方法をこの問題に適用することができる。本稿では、 $g(n)$ の n に関する解析性の破れを $[Z^n]$ の n に関する零点を調べることによって考察する [8]。これは Lee-Yang の相転移のシナリオ [9] を $g(n)$ に関して適用したものであり、零点の存在領域が解析性が破れる領域と密接に関わっていることが知られている。本稿は以下のように構成される。次節では、具体的なモデルと定式化について説明する。続く第 3 節で結果を示しモデルごとの結果の違いを説明する。第 4 節では、零点の振る舞いと RSB との関わりについて考察する。最後の節はまとめて充てられる。

2 問題の定式化

2.1 絶対零度極限

次の方程式を n に関して解き、 n に関する零点を得ることが目標である。

$$\Xi(n) \equiv [Z^n] = 0. \quad (5)$$

以下レプリカ数に関する零点をレプリカゼロと呼ぶ。これは超越方程式であるため、数値的に解くことさえ一般には非常に難しい。そこで $T \rightarrow 0$ 極限をとると分配関数の寄与は基底状態のみからなることに着目する。この極限で (5) 式は

$$\Xi(n) \approx [d_g^n e^{-\beta n E_g}] = 0, \quad (6)$$

ここで E_g は基底状態のエネルギーであり、 d_g はその状態の縮退度である。絶対零度でレプリカ数 n が有限であると仮定すると、因子 $e^{-\beta n E_g}$ が発散ないしは消失して意味のある解がなくなってしまう。そこで $n \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$ で β と n の積が有限に残るような極限 $y = \beta n \sim O(1)$ を考える。この仮定は SK モデルの解がこの極限で well-defined であることとコンシステントである [10]。この条件のもとで (6) 式は

$$\Xi(y) = [e^{-y E_g}] = 0. \quad (7)$$

となる。以降我々は、 $\pm J$ イジングモデルを扱うこととする。ハミルトニアンは

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j, \quad (8)$$

であり、最も簡単なケースとして $J_{ij} = \pm 1$ が対称に現れるボンド分布

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{2} \delta(J_{ij} - 1) + \frac{1}{2} \delta(J_{ij} + 1), \quad (9)$$

を仮定する。これらの条件から E_g が整数値になるために、(7) 式が $x = e^y$ の多項式となり取り扱いが容易となる。

2.2 モデルの選択

上記に述べた極限をとることにより方程式は簡略化されたが、配位平均の困難は依然残されている。スピン数が増えるにつれ、配位平均 $[\dots]$ にかかる和の回数が指数関数的に増えていくため、このままでは大きなサイズの系を取り扱うことは不可能である。そこで我々は、ケーリーツリー (CT) 上の $\pm J$ イジングモデルを扱うこととした。このモデルを選択する理由は二つある。1 つには、Bethe-Peierls の方法 (BP) とレプリカ法を併用することによって配位平均の困難を回避してモーメントを効率的に計算することができるからである。また、過去の先行研究から CT に対してはスピングラス相が存在することがわかっているので [11, 12]、スピングラス秩序とレプリカゼロの関係を調べることができるという点が 2 つめの理由である。なお、CT は自由境界条件を与えるとどこにもフラストレーションが発生せず Pure 系と同じになるため、境界条件として境界のスピンに ± 1 の値をランダムにとるランダム磁場をかけることとする。

CT の場合の BP+レプリカ法から導かれる公式を、ここでは結果的だけ与えておく。配位数 $c = 3$ の CT の場合を例にとると

$$\pi_i(h_i) \propto \iint \pi_j(h_j) \pi_k(h_k) \left[\delta(h_i - \hat{h}_j - \hat{h}_k) \left(\frac{2 \cosh \beta h_i}{2 \cosh \beta \hat{h}_j 2 \cosh \beta \hat{h}_k} \right)^n \right] dh_j dh_k, \quad (10)$$

$$\Xi_i = \Xi_j \Xi_k (2 \cosh \beta)^{2n} \iint dh_j dh_k \pi_j(h_j) \pi_k(h_k) \left[\left(\frac{2 \cosh \beta (\hat{h}_j + \hat{h}_k)}{2 \cosh \beta \hat{h}_j 2 \cosh \beta \hat{h}_k} \right)^n \right], \quad (11)$$

$$\beta \hat{h}_j = \tanh^{-1}(\tanh \beta J_{ij} \tanh \beta h_j). \quad (12)$$

ここで $\pi(h)$ はランダムネスによってゆらぐ局所場の分布関数であり、 Ξ_i はサイト i より前の世代がない

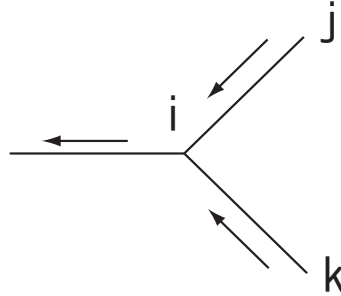


図 1: 配位数 $c = 3$ の CT の局所的な構造。サイト j, k から i へと局所場が伝搬する。

いと仮定したときのモーメント $[Z^n]$ である。式 (10) は図 1 のようにサイト i の一つ後ろの世代のサイト j, k から局所場が伝搬して、それによってサイト i の局所場が決定されることを表している。具体的な手順としては

1. 初期条件を $\pi(h) = (\delta(h - 1) + \delta(h + 1))/2$ 、 $\Xi(n) = (2 \cosh \beta)^n$ と与える。これは境界で ± 1 をランダムに取るランダム磁場がかかっていることに対応する。
2. 有効的な局所場の分布関数を (10) 式に従って境界から順番に更新し、 $\{\pi_i(h_i)\}$ 分布の列を得る。
3. 得られた $\{\pi_i(h_i)\}$ を使って $\Xi_i(n)$ を計算する。

というプロセスを経てモーメントが計算される。(10) 式は分布関数どうしの関係式なので一般に評価するのは厳しいが、絶対零度極限では $\pi(h)$ の形が著しく制限され、

$$\pi_i(h_i) = p_{i;0} \delta(h_i) + \sum_{f=1}^{c-1} p_{i;f} (\delta(h_i - f) + \delta(h_i + f)), \quad (13)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{p}_i = (p_{i;0}, p_{i;1}, \dots, p_{i;c-1})$ は、 $p_{i;0} + 2 \sum_{f=1}^{c-1} p_{i;f} = 1$ を満たす確率のベクトルである。このように $T = 0$ では分布関数が有限個のパラメータで特徴づけられるため、(10) 式を具体的に解くことが可能になる。

2.3 ケーリーツリーと近しいモデル群

CT としばしば同一視されるモデルとして、ベータ格子 (BL) とレギュラーランダムグラフ (RRG) がある。これらの言葉の意味は文献によって若干異なるが、本稿では次のように定義する。

- ケーリーツリー (CT): 中央のサイトとそのまわりのサイトからなる有限のツリーを指す。第一世代は c 個のサイトからなり、それぞれがボンドで中央のサイト (第 0 世代) とつながっている。第 k 世代は $c-1$ 個の新しいサイトに接続され、それら新しいサイトが第 $k+1$ 世代を成す。この手順を L 世代まで繰り返すと大きさ L の CT が得られる。第 L 世代が境界となる。この格子の $[Z^n]$ は $x = e^y$ の多項式として記号的に求めることができるため、レプリカゼロの計算が可能である。
- ベータ格子 (BL): CT の境界が無限に遠いとして考えた CT の一部分。あるいは、境界条件として、境界のスピンのかかる局所場が、BP の固定点分布と同じ分布であると仮定した CT と考えることもできる。このため境界条件がパラメータ依存 (我々の場合 $y = \beta n$) になるため、 $[Z^n]$ は一般に x の多項式にならずレプリカゼロを計算することはできない。
- レギュラーランダムグラフ (RRG): 一つのサイトが他の c 個のサイトに接続されているという条件の下でランダムに生成されたグラフ。このモデルは局所的にはツリー構造をしているが全体としてはループを持つために有限系のモーメントを求めることは容易ではないため、レプリカゼロの計算は難しい。一方で、 $N \rightarrow \infty$ の極限のみで解くことができ、RRG と BL は多くの性質を共有することが知られている。ここでは RRG はこの無限の大きさの系のことを指すとす。

RRG 上の $\pm J$ イジングモデルに対してはスピングラス相が存在するだけでなく、Full-step の RSB 相 (FRSB) が存在すると考えられている。また比較的疎結合の 3 体相互作用の RRG に対しては、1-step の RSB 相 (1RSB) が安定であると考えられている。ナイーブに考えると十分大きな CT は、ローカルには同じ構造をしているのだから、RRG と共通の性質を持っていてよいと期待される。故に RSB と CT の転移が何らかの関係を持っている可能性がある。結果からいえば、この期待に対する答えは否定的なもので、CT のレプリカゼロと RRG の RSB 相への相転移は異なるものであるということが結論された。以下ではこの結論がどのように導かれるかということ、レプリカゼロのプロットとその他の解析の結果を示しながら説明する。

3 結果

3.1 レプリカゼロ

まず CT の場合の零点のプロットを示す。配位数 $c = 3$ の場合の CT と、 $c = 3$ の 3 体相互作用 CT (3-CT) 零点をそれぞれ図 2 と図 3 に与えた。図 2 をみると、すべての零点が $\text{Im}(y) = \pi/2$ の直線上にあることがわかる。後で説明するが、これに対応する $c = 3$ の RRG は AT 不安定性を起こすと考えられているため、この図からすぐに RRG の AT 不安定性と CT のレプリカゼロは無関係であることが結論される。一方、図 3 は $c = 3$ の 3-CT の零点であるが、零点が実軸に近づく様子が観測される。このモデルに対応する RRG においては 1RSB が $y = \infty$ で起こることが知られており [13]、零点の傾向を見るとこれが y の無限大まで伸びていくとは考えにくいので、やはり RRG の 1RSB 転移とも CT の零点は無関係であると考えられる。

零点が実軸に近づく傾向は $c = 4$ の CT、及び $c = 4$ の 3-CT でも見受けられる。それぞれのプロットは図 4、図 5 である。これらの対応する RRG に対しても AT 不安定性、1RSB 不安定性の起こる y が計算で

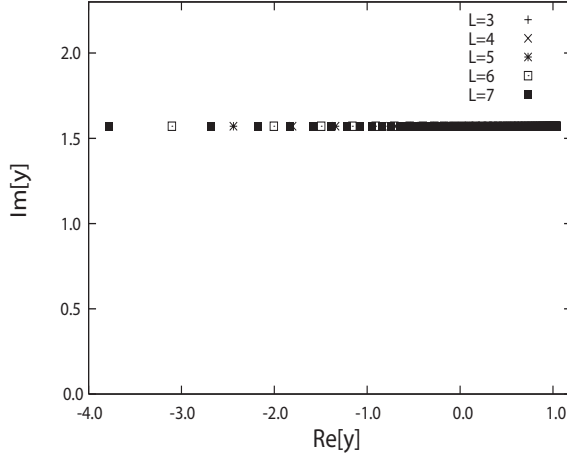


図 2: $c = 3CT$ の場合のレプリカゼロ。全ての零点が $\text{Im}(y) = \pi/2$ の直線上に張り付いていることがわかる。

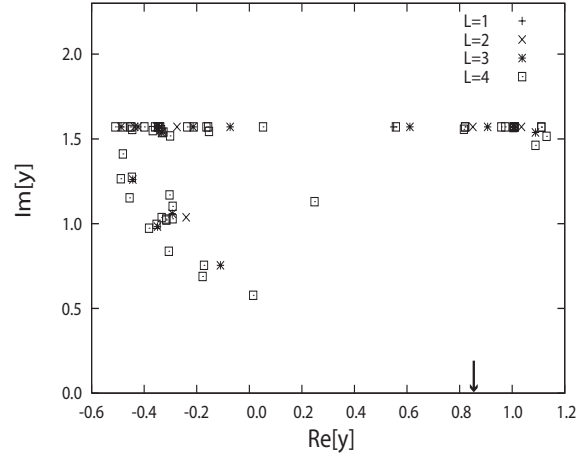


図 3: 配位数 $c = 3$ の 3-CT のレプリカゼロ。一部の零点が実軸に向かって伸びていくことがわかる。計算の限界からどこにぶつかるかまではっきりといえない。矢印は 3.2 節の $L \rightarrow \infty$ 極限の解析から示唆される零点の衝突点と思われる個所を示している。

きるが、零点の衝突点と思しき箇所と目視の範囲で大きくずれていることが観測される。本来はもっと大きなサイズの解析を行い、熱力学極限で漸近する点 y_c を評価すべきだが、CT は L の指数関数に比例してスピンの数が増えていき、結果として $\Xi_L(y)$ の多項式の次数も L の指数関数となるため、これ以上の L で $\Xi_L(y) = 0$ を解くことが現在のコンピュータでは不可能であった。代わりに以下では $L \rightarrow \infty$ の極限を解析的に調べることにより y_c の値を評価することを考える。図 3-5 に書き込まれている矢印はその解析から見積もられた y_c であり、零点の近づく様子とうまく合致していることが見て取れる。 $c = 4$ の 3-CT の場合は y_c が二つあり、左側の特異性には零点があまり近づいていないようにみえるが、これはサイズが小さすぎるせいだと考えられる。

3.2 熱力学極限

さて、 y_c を見積もるために極限 $L \rightarrow \infty$ をとることを考えよう。まず $c = 3$ の CT を考える。これは、式 (10) において π_i, π_j, π_k が同じ収束分布であると仮定すればよい。絶対零度では π_i が有限個のパラメータ $\{p_{\infty;f}\}$ で表現されるのでこれを解くことは比較的容易である。今の問題では $p = 1/2$ をとっていることが効いていて $p_{\infty;0} = p_*$ を求めれば十分である。結果は

$$p_* = \frac{2 + x^2 - \sqrt{x^4 + 8x^2}}{2(1 - x^2)}, \quad (14)$$

となり、 $L \rightarrow \infty$ の収束分布が単一の解析関数で書けていることがわかる。 $x = e^y$ である。

一方、 $c = 3$ の 3-CT の場合は事情が異なる。この場合の p_* の満たす方程式を同様に書き下すことができ、

$$p_* = \frac{\{p_*^2 + 2p_*(1 - p_*)\}^2 + \frac{1}{2}e^{-2y}(1 - p_*)^4}{1 - \frac{1}{2}(1 - p_*)^4(1 - e^{-2y})} \quad (15)$$

となる。この方程式の解の振る舞いを調べるには漸化式のリターンマップを書くことが有用である。リターンマップと求められた収束解の振る舞いはそれぞれ図 6 と図 7 に示してある。リターンマップからわかるように $x \gtrsim 2.35$ の範囲では 3 つの固定点が存在することがわかる。一方で $x \lesssim 2.35$ の領域では $p_* = 1$ 以外の解が存在しない。結果として $c = 3$ の CT とは異なり局所場分布は $x \approx 2.35 \Leftrightarrow y_c \approx 0.85$ で転移を持つということが結論される。実際に図 3 を見るとそのあたり零点が近付いていることが観測される。

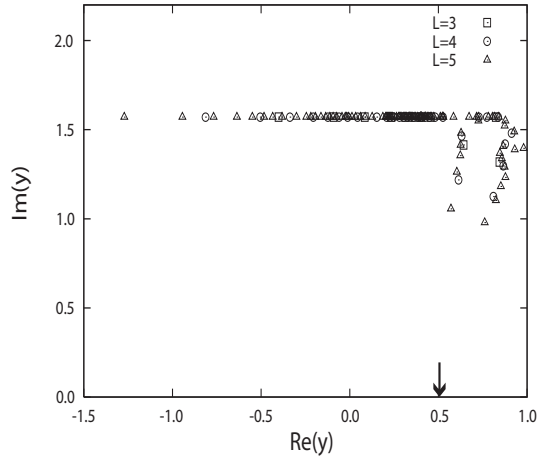


図 4: 配位数 $c = 4$ の CT のレプリカゼロ。 L が増加するにつれ $y_c \approx 0.5$ に近づいているように見える。矢印は局所場分布の特異点の位置を表している。

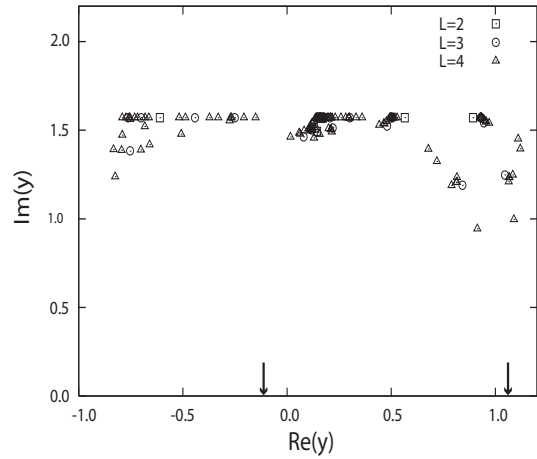


図 5: 配位数 $c = 4$ の 3-CT のレプリカゼロ。零点が $y_c \approx 1.1$ あたりに伸びている様子が見て取れる。この場合は局所場分布に 2 か所特異性があり両方が矢印で示されている。

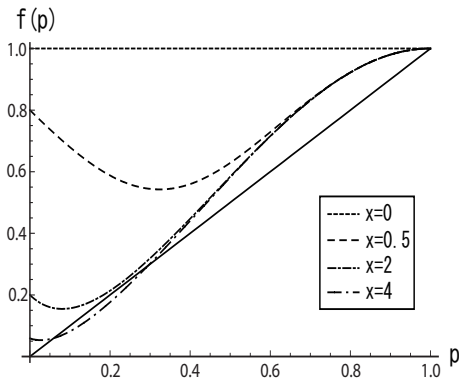


図 6: 配位数 $c = 3$ の 3-CT のリターンマップ。収束解 p_* の振る舞いが $x = e^y$ に依存して不連続に変わることがわかる。実線は $f(p) = p$ を表す。

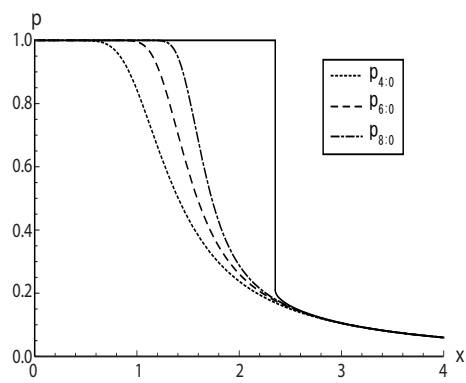


図 7: 配位数 $c = 3$ の 3-CT における、局所場分布が 0 を取る確率 $p_{g;0}$ の漸近的な振る舞い。有限のジャンプが $x \approx 2.35$ で起こることが分かる。実線は $L \rightarrow \infty$ の解 $p_{\infty;0} = p_*$ を表す。

同様の考察を $c = 4$ の CT に対して行うことができる。リターンマップと収束解を図 8 と 9 にそれぞれ示す。 c が偶数の場合、自明な解 $p_* = 0$ が常に存在する。この解の影響で、 p_* が 0 から有限の値へと連続的に立ちあがる、3-CT の場合とは異なる解の分岐が存在することがわかる。この転移は $x_c = \sqrt{3} \Leftrightarrow y_c \approx 0.5$ でおき、この場合もレプリカゼロの近づく点とよく合致していることがわかる。

一般に、 $k \geq 3$ 体相互作用のモデルにおいては p_* の飛び不連続な転移が起き、配位数 c が偶数のとき $p_* = 0$ から立ち上がる連続的な転移が起こるものと思われる。実際、 $c = 4$ の 3-CT では両方の転移が起こり、連続、不連続の転移がそれぞれ $x = 3 \Leftrightarrow y \approx 1.1$ 、 $x \approx 0.86 \Leftrightarrow y \approx -0.15$ で出現する。図 5 では、零点が $y \approx -0.15$ 近傍に近づいているように見えないが、これはサイズが小さいためと考えられる。この点で起こる転移は $c = 3$ の 3-CT の場合と同じ不連続転移であるため、その場合と同様に $\text{Re}(y)$ が負の領域から零点が延びてくる振る舞いが見えると考えられる。一方、 $y \approx 1.1$ の近傍に近づく零点は $c = 4$ の CT の場合の振る舞いと似ている。これらの事実は、Lee-Yang の零点の場合と同様、転移の次数と零点の入射角度との関係を示していると考えられ興味深い、それに関する解析は本稿の趣旨を超えるため割愛する。

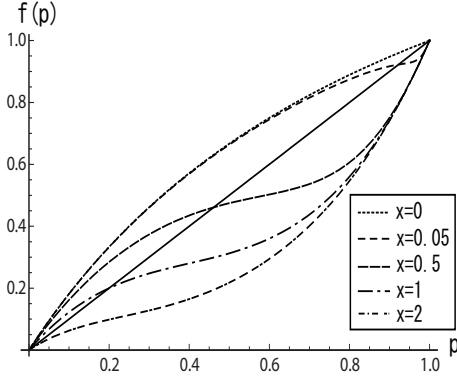


図 8: 配位数 $c = 4$ の CT のリターンマップ。収束解 p_* は一意に決まるが、 $x = \sqrt{3}$ において特異性が現れる。

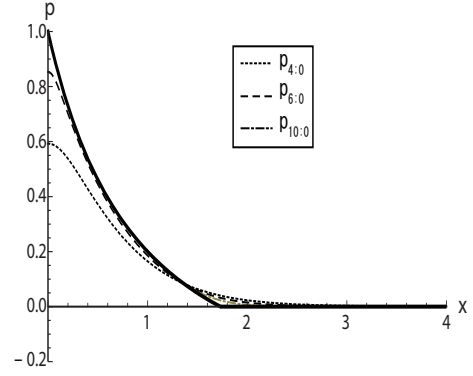


図 9: 配位数 $c = 4$ の CT における、 $p_{g;0}$ の漸近的な振る舞い。実線は p_* で、この場合 p_* は x の全領域で連続だが $x = \sqrt{3}$ で一階の微分が不連続になる。

4 いくつかの不安定性との比較

4.1 1RSB に対する不安定性

かつては、1RSB と FRSB は両方とも AT 不安定性によっておこると考えられていたが、最近の研究からこれらは異なるメカニズムによって発生するということが明らかにされ、このうち 1RSB は自由エネルギーの大偏差解析から見通しよく理解されることが示されている [7, 14]。ここではそのアウトラインを説明する。ボンド配位を一つ固定した場合の分配関数は

$$Z = e^{-N\beta f(\{J_{ij}\})} \quad (16)$$

で与えられる。このとき、自由エネルギー f はランダムネスのためにゆらぐ確率変数として取り扱うことができるが、この分布関数が次のように指数関数形でスケールされることを仮定する。

$$P(f) \sim \exp(N\Sigma(f)). \quad (17)$$

ここで、大きい N の極限 $\Sigma(f) \sim O(1)$ であることが仮定される。この $\Sigma(f)$ をレート関数と呼ぶ。規格化条件 $\int df P(f) = 1$ が満たされるためには、不等式 $\Sigma(f) \leq 0$ が満足されなければならない。一方で、鞍点法を用いると $\Sigma(f)$ と $g(n)$ を関係づけることができる。

$$g(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log[Z^n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int df P(f) \exp(-N\beta n f) \simeq \max_f (\Sigma(f) - \beta n f). \quad (18)$$

これは $g(n)$ のルジャンドル変換として $\Sigma(f)$ が計算されることを意味する。

$$\Sigma(f) = \min_n (g(n) + \beta n f). \quad (19)$$

ここで $g(n)$ などの微分可能性を仮定すると

$$-\beta f(n) = \frac{\partial g(n)}{\partial n}, \quad \Sigma(n) = g(n) - n \frac{\partial g(n)}{\partial n} \quad (20)$$

を得る。一方で Σ は非正であるため、次の条件式

$$\frac{\partial g(n)}{\partial n} \geq \frac{g(n)}{n}, \quad (21)$$

が要求される。レプリカ法を使うことで $g(n)$ は計算できるのでこの条件を評価することは容易である。等式が成り立つ点 n_s 以下で 1RSB 相となる。

RRG に対して、 $g(n)$ は具体的に計算することができ、 n_s ($T \rightarrow 0$ 極限では y_s) が有限であることを確認できる。一方、BL と CT に対してもこれがある程度評価することができる。それによれば、BL と CT の場合は $y_s = 0$ であり 1RSB 転移は起きないということを直接示すこともできる [8]。

4.2 AT 不安定性

AT 条件は FRSB 相への転移を示す臨界条件であるが、疎結合のモデルに対しては、その特徴づけが未だなされていない。実際、ある先行研究においては p_* が 0 から立ち上がる転移が AT 条件と同等されている [13]。そこで我々は、我々の扱った CT に対応する RRG に対して AT 不安定性を再度計算したのでこれを報告する。

今回、我々はスピングラス帯磁率の発散を AT 条件として採用した。実際この量はしばしば AT 不安定性を表すものとして RRG の解析に採用されている [15, 16]。この量を有限のレプリカ数へ拡張したものは

$$\chi_{SG} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial h_i} \right)^2 \right]_n \quad (22)$$

となる。ここで $[(\dots)]_n$ は有限レプリカ数の元での境界磁場とボンドの分布関数

$$P_n(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) = \frac{P(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) Z^n(\{J_{ij}\}, \{h_i\})}{\sum_{\{J_{ij}\}} P(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) Z^n(\{J_{ij}\}, \{h_i\})} \quad (23)$$

に関する平均である。

2 サイト間のパスが一意に決まるという、ループの無い系特有の性質を用いるとこれは具体的に評価することができる。中心のサイト 0 から距離 G はなれたサイトに摂動が入り、それがサイト 0 に伝搬する状況を考えよう。このとき、偏微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial h_G} &= \frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \hat{h}_0} \frac{\partial \hat{h}_0}{\partial h_1} \dots \frac{\partial h_G}{\partial \hat{h}_G} = \frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \hat{h}_0} \prod_{g=1}^G \frac{\partial \hat{h}_{g-1}}{\partial h_g} \frac{\partial h_g}{\partial \hat{h}_g} \\ &= \frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial \hat{h}_0} \prod_{g=1}^G \frac{\partial \hat{h}_{g-1}}{\partial \hat{h}_g}, \end{aligned} \quad (24)$$

と計算することができる。特に絶対零度では

$$\left| \frac{\partial \hat{h}_{g-1}}{\partial \hat{h}_g} \right| = \begin{cases} 0 & (|\hat{h}_g + r_g| > 1) \\ 0 \text{ or } 1 & (|\hat{h}_g + r_g| = 1) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad (25)$$

が成り立つため、この量が 0 になったら消失、1 ならそのまま生き残るというある種のランダムウォークの問題として考えることができる。このウォーカーが生き残る確率を $P_{(G \rightarrow 0)}$ とおくと

$$\left[\left(\frac{\partial \langle S_0 \rangle}{\partial h_G} \right)^2 \right]_n \propto P_{(G \rightarrow 0)} \quad (26)$$

となり、スピングラス帯磁率は

$$\chi_{SG} \propto \sum_{G=0}^{L'} (k-1)^G (c-1)^G P_{(G \rightarrow 0)} \quad (27)$$

で与えられる。ここから AT 条件は

$$\log((k-1)(c-1)) + \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{1}{G} \log P_{(G \rightarrow 0)} = 0 \quad (28)$$

となる。この生存確率は RRG (BL でも同じ解析) に対しては実際に評価できる。CT に対しては $P_{(G \rightarrow 0)}$ の世代ごとへの依存性が自明でないために、この評価を行うことは難しい。十分大きな CT は、BL とほぼ同じ性質を持っていることを期待して BL に関しての解析で代用する。それぞれのモデルについて AT 不安定性を起こす点 y_{AT} を、これまでに評価した y_c, y_s と共に表 1 にまとめておく。これらの値を比較すると、CT の相転移を支配していると思われる y_c は、明らかに各種の RSB を起こす y の値とずれている。以上の結果から CT のレプリカゼロと RSB の破れは無関係であるということが確認される。

(k, c)	y_{AT}	y_c	y_s
(2, 3)	0.54397	なし	0.41741
(2, 4)	0.89588	$\log \sqrt{3} \approx 0.54931$	0.38926
(3, 3)	1.51641	0.85545	∞
(3, 4)	1.35403	$-0.15082, \log 3 \approx 1.09861$	1.41152

表 1: 各 y の値の表。注意すべきは、それぞれの y の値を計算したモデルが異なる点で、 y_c は局所場分布の特異性で全てのモデルに共通だが、 y_s は RRG、 y_{AT} は RRG と BL に対して評価したものである。

4.3 y_c における転移の物理的な意味

以上の結果において、BP の固定点の分岐が CT のレプリカゼロと対応していることを見た。ここではこれらの解の物理的な意味を考える。

ナイーブに考えると、 $p_* = 1$ というのは全ての局所場が 0 になるという意味なので常磁性相と考えられる。一方、 $p_* < 1$ はスピンのうちいくらかはエネルギーを増加させることなく任意の方向を向くことができるということを意味する。これは基底状態が幾重にも縮退していることを意味するので、これが RS なスピングラス相を表していると解釈できる。実際、スピングラス秩序変数に関する次のような式が成り立つ。

$$q_{\mu\nu} = \frac{[\text{Tr} S_g^\mu S_g^\nu e^{-\beta \sum_\mu H^\mu}]}{[Z^n]} = \text{Tr} S_g^\mu S_g^\nu \rho_g(S) = 1 - p_{g;0}. \quad (29)$$

故に、局所場分布の特異性はスピングラス秩序変数の転移として解釈できる。 $k = 3$ の場合の、不連続な飛びを伴った転移は RS なスピングラス相から常磁性相への転移として解釈できる。このような転移は、全結合モデルでも観測される。また、 $c = 4$ の場合に現れる $p_* = 0$ からの連続的な転移はスピングラス秩序変数 q が $q_{EA} = 1$ へと飽和した相だと考えられる。この転移もおそらく RS から RS への相転移と考えられる。この結論は CT では RSB が起きないという過去の報告と合致している [11, 12]。このような q の飽和相への転移は全結合モデルでは観測されていないが、この相は c が偶数の場合にのみ現れる、系の幾何学的な形に敏感に依存した相と考えられるので、他のモデルで現れなくともそれほど不思議ではないと考えられる。

5 おわりに

本稿では、CT 上の $\pm J$ モデルのレプリカ数に関する相転移と零点の関わりを議論した。零点の振る舞いの観測からいくつかの格子でレプリカ数に関する相転移が起こることが示唆されたが、当初期待した RSB と関わりを持つような転移ではないことが、いくつかの解析から示された。現在のところ、このレプリカゼロを使って RSB の特徴付けをできるような段階ではないし、今回の解析で n に関する相転移について新たな知見が得られたわけでもないが、この方法が、RSB の見通しを良くする可能性は十分にある。特に、1RSB をレプリカゼロで観測することに成功した研究はあるが [7]、FRSB の観測に成功した例はない。FRSB を起こすときレプリカゼロがどのように振舞うかは全く非自明な問題であり、RSB の理解に有用な情報をもたらすと考えられる。

参考文献

- [1] H. Nishimori: *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Oxford University Press, Oxford, 2001).

- [2] G. Parisi: J. Phys. A **73** (1980) L115.
- [3] G. Parisi: J. Phys. A **13** (1980) 1101.
- [4] M. Talagrand: Ann. Math. **163** (2006) 221.
- [5] E. C. Titchmarsh: *The Theory of Functions* 2nd. ed. (Oxford University Press, Oxford, 1939).
- [6] J. L. van Hemmen and R. G. Palmer: J. Phys. A **12** (1979) 563.
- [7] K. Ogure and Y. Kabashima: Prog. Theor. Phys. **111** (2004) 661; Prog. Theor. Phys. Supplement **157** (2005) 103.
- [8] T. Obuchi, Y. Kabashima, and H. Nishimori: arXiv:0809.2635
- [9] C. N. Yang and T. D. Lee: Phys. Rev. **87** (1952) 404; *ibid.* **87** (1952) 410.
- [10] G. Parisi and T. Rizzo: arXiv:0706.1180 (2007).
- [11] J. M. Carlson, J. T. Chayes, L. Chayes, J. P. Sethna, and D. J. Thouless: Europhys. Lett. **5** (1988) 355.
- [12] Pik-Yin Lai and Y. Y. Goldschmidt: J. Phys. A **22** (1989) 399.
- [13] A. Montanari and F. Ricci-Tersenghi: Euro. Phys. J. B **33** (2003) 339.
- [14] T. Nakajima and K. Hukushima: J. Phys. Soc. Jpn. **77** (2008) 074718.
- [15] O. Rivoire, G. Biroli, O. C. Martin and M. Mézard: Eur. Phys. J. B **37** (2004) 55.
- [16] O. C. Martin, M. Mézard and O. Rivoire: J. Stat. Mech (2005) P09006.