高階RSBを示す系の探索と解析と示唆 -Genelarized Random Energy Modelから言えること-

小渕　智之
東京工業大学大学院理工学研究科　物性物理学専攻

スピングラスを含むフラストレーションの強い系では、低温で沢山の準安定状態が現れ、これらが系の状態を支配すると考えられている。これら準安定状態は、特に、系の動的な側面に強い影響を与え、遅い緩和や履歴現象などを導くと考えられている。一方で、系の平衡状態は、それら準安定状態の中で最も安定な一つの状態によって支配されるため、その安定な状態が（一次相転移のような）突然の変化をする場合を除けば、準安定状態が系の平衡状態に影響を及ぼすことは、通常はない。

以上の一般的な議論は、しかし、準安定状態が非常にたくさんある場合には破綻し得る。仮に、ある準安定状態 α の自由エネルギー $f^{\alpha} = -(1/\beta)\log Z_{\alpha}$ というものが定義出来たとしよう。このとき系全体の分配関数は次のように書かれる

$$Z = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} = \sum_{\alpha} e^{-N\beta f_{\alpha}} = \sum_{f} \mathcal{N}(f) e^{-N\beta f}. \tag{1}$$

ここで $\mathcal{N}(f)$ は自由エネルギー値が f であるような準安定状態の個数を表す。この個数が N の指数関数オーダー $\mathcal{N}(f) \propto e^{N\Sigma(f)}$ の場合には、自由エネルギー値が高い（比較的不安定な）準安定状態でも、その個数が十分大きければ、分配関数において支配的な寄与になり得る。つまり準安定状態は、その個数が莫大ならば平衡状態をも支配し得る。この個数を特徴づける指数 $\Sigma(f)$ を Complexity と呼ぶ。

スピングラスの平均場理論においては、上記のような莫大な数の準安定状態が、広いクラスのスピングラスモデルにおいて実際に存在することが示されている。また Complexity $\Sigma(f)$ を実際に計算する処方箋もある程度整備されている。これらはスピングラス理論の強みであるが、実は弱みもそこに同時に存在していて、根拠となっている準安定状態 α の自由エネルギーというものが実際にどのように定義されるのか[1]、準安定状態はどのような構造をしているのか、またそのような構造が実次元の系に現れ得るのか、といった未解明の問いが多く残されている。

このような、たくさんの準安定状態が現れるような状況を記述する数理的手法、概念が、レプリカ法とそれに伴うレプリカ対称性の破れ（RSB）というものである。一般に RSB は step 数というものを有する。この step 数は準安定状態の構造の複雑さを反映するもので、構造が複雑になるにつれて、step 数は上がっていく。どの程度の step 数が必要になるかはモデルや問題に依存する。現在、1-step RSB(1RSB) を示す系の性質はかなり

[1]数学的には、Boltzmann 分布のサポートが、熱力学極限で自発的に分割され、そのサポートのそれぞれを準安定状態と見なすのが自然と考えられている。各サポート上の Boltzmann weight の部分和から各状態の自由エネルギー値が定義される。このようにサポートが完全に分割される場合の準安定状態は、Pure state(純状態) と呼ばれ単なる準安定状態とは区別されるが、本文中では気にしなかった。

良く分かっているが、より高階のRSBにおいては、形式的な解構成法が知られているのみで、それらがどのような性質を持つのかは、あまり良くわかっていない。

以上の背景の下、RSBや準安定状態の構造をよりよく理解すべく、我々は、高階のRSBを示す系の探索と解析を行った。この試みの出発点として高階のRSBを示す（と思われていた[1]）Generarized Random Energy Model(G-REM)[2]と呼ばれるモデルの解析を行った。REMはRSBを含む非自明な振る舞いを示す一方で、非常に取り扱い易いモデルであり、REMを研究することでRSBの理解が格段に進んだという経緯がある[3, 4]。我々は、この経緯を真似て、G-REMを近年のRSBに対する理解を元に詳細に解析することで高階のRSBに対する知見を得ることを試みた。G-REMは各エネルギー準位$E_\nu(\nu = 1 \cdots 2^N)$を次のように与えることによって定義される

$$E_\nu = \epsilon_\nu^1 + \epsilon_\nu^2 + \cdots + \epsilon_\nu^k. \tag{2}$$

ここでϵ_ν^iは平均0、分散a_iを持つガウス乱数だが、各νごとに独立ではなく、$\nu = 1 \cdots 2^N$をクラスターに分け、そのクラスター内部では同じ値を持つようにする。階層iの各クラスターはさらに深層$(i+1, \cdots, k)$のクラスターいくつかを包含するようにデザインされる。つまりエネルギーに人工的に階層が導入されているモデルである。ちなみに各νにおいてエネルギーが独立である場合は、元のREMに帰着される。

解析は、レプリカ法を経由する方法としない方法の双方を実行し、その結果を比較することによって行われた。結論として、G-REMは高階のRSBを有する系というより、複数ある秩序変数のそれぞれが、独立に1RSBを発現する、多重1RSB系であるということが理解された。

また、この多重1RSB系におけるComplexityの解析法を構成し、それを高階RSBのComplexity解析との比較も行った。その結果、G-REMにおいては、各エネルギー階層iごとに独立なComplexityが定義されるが、それは高階RSBのComplexityとは異なるということが理解された。さらに、G-REMの定義の不自然さを反映してか、それぞれのComplexityを個別に取りだすことが、基本的には不可能であるということも理解された。以上の結果は、G-REMによりRSBを理解しようという試みとしては、かなり否定的なものだと言える。

講演では、モデルとRSBのレビューから入り、その後に以上の結果の概観をお話しする。余裕があれば、REMとG-REMの持つ、誤り訂正符号への関係を説明し、そこからこれらの系のComplexityを数値的に評価しうる可能性についても議論したい。

参考文献

[1] M Mézard and A Montanari: *Information, Physics, and Computation* (Oxford: Oxford University Press, 2009)

[2] B. Derrida: *J. Physique Lett.* **46** (1985) L-401

[3] B. Derrida: *Phys. Rev. B* **24** (1981) 2613

[4] D. Gross and M Mézard: *Nucl. Phys. B* **240** (1984) 431