

スピングラス模型の臨界点と双対変換¹

— 厳密解を求めて —

京都大学 大学院情報学研究科 システム科学専攻, 大関 真之²

(2010年5月17日受理)

本解説記事では、有限次元のスピングラス模型に対する新たな解析手法を紹介する。新たな解析手法といっても、核となる部分は古くより知られたものである。ひとつは分配関数の対称性を利用した双対性。そしてもうひとつは実空間繰り込み群である。これらをスピングラス模型の解析でよく扱われるレプリカ法とあわせた手法である。

双対性は、古典スピン系の相転移点を厳密に求める手法として利用されてきた。一方で相互作用にランダムさがあるスピングラス模型への適用をナイーブに考える場合、いくつかの問題点がある。近年の繰り込み群を使った議論により、それらの問題点を乗り越えてスピングラス模型における臨界点を非常に精度よく導出できることが明らかになった。スピングラス模型に対する双対変換についての一連の研究について、歴史的な経緯と最新の結果を織り交ぜて、本解説記事では紹介する。

スピングラス模型には系のランダムさによるフラストレーションと呼ばれる幾何学的な構造から生じる競合状態が発現する。それに起因する現象を取り扱う基本的な模型とも言える。しかしながらその解析は主に平均場理論によるもので、有限次元の解析となるとお手上げ状態であった。特に相転移に関する系統的な理論となると、皆無である。このスピングラス模型は他の物理や境界分野において構築された理論模型と対応する部分も多々ある。本解説記事では、デジタル情報の読み出しの問題と有限次元スピングラス模型の対応関係を一例として取り上げる。そして急速に研究者の興味を集めている境界分野のひとつである量子情報理論におけるスピングラス模型の役割についても紹介する。特にこの量子情報におけるある問題に関して、スピングラス模型の特別な臨界点の位置を決定する事が重要であり、本解説記事に登場する手法がその答えを導いてくれる。

このように統計力学としての基本問題としてだけでなく、応用面からも重要であるスピングラスにおける相転移の問題を中心に、有限次元のスピングラスに対する新しい理論をこの解説記事では紹介する。

目次

1 序論	442
1.1 問題設定	442
1.2 スピングラス模型	443
1.3 相図	444

¹本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

²E-mail: mohzeki@i.kyoto-u.ac.jp.

2	有限次元のスピングラス理論	446
2.1	フラストレーション	446
2.1.1	ゲージ対称性	447
2.1.2	フラストレーションとゲージ変換	448
2.2	レプリカ法による解析	450
2.2.1	レプリカ法と有効土 J Ising 模型	452
2.2.2	異なるレプリカ数間の関係式	452
3	双対性による解析	453
3.1	双対性	454
3.1.1	単純な例での双対変換	454
3.2	双対変換の一般的な定式化	456
3.2.1	双対変換の第一段階: Fourier 変換	458
3.2.2	双対変換の第二段階: 温度の変換	459
3.3	双対変換の操作についての一般的考察	461
3.4	他の古典スピン模型の双対変換	462
4	有限次元スピングラス模型の双対性による解析	463
4.1	レプリカ法による双対変換の適用	463
4.1.1	$n = 1, 2$ での双対変換	464
4.1.2	相対 Boltzmann 因子による表現	466
4.1.3	$n \geq 3$ の場合	468
4.2	多重臨界点と双対変換	468
4.2.1	温度の変換の可能性	470
4.2.2	温度の変換 D' の固定点	471
4.3	正当性の検証: 階層格子	472
4.3.1	階層格子の構成	473
4.3.2	繰り込みの実際	474
4.3.3	ランダムスピン系の繰り込み群	475
4.4	正当性の検証: いくつかのレプリカ数に対する多重臨界点	477
4.5	正当性の検証: 温度の変換式 $D'(K)$	480
4.6	正当性の検証: 他の相転移点, 他の模型	481
5	繰り込み群と双対変換	483
5.1	繰り込みの流れ	483
5.2	階層格子: 多重臨界点	485
5.3	正当性の検証: $D'(K) \rightarrow D(K)$	487
5.4	正方格子: 一般的な定式化	488
5.5	多重臨界点とフラストレーションの分布	491
5.6	多重臨界点の位置	492
5.7	ランダムさの少ない領域での相境界の厳密解	494
5.8	スピングラス模型への双対変換の更なる応用	500

6	情報統計力学としての有限次元スピングラス	503
6.1	データの読み出し問題とスピングラス	503
6.1.1	1次元の読み出し問題と Ising 模型	503
6.1.2	相互情報量と分配関数	504
6.1.3	1次元の干渉つきの読み出し問題	506
6.2	2次元スピングラス模型との対応	507
6.2.1	2次元の干渉つき読み出し問題	507
7	有限次元スピングラスと量子情報誤り訂正符号	509
7.1	量子情報と誤り訂正符号	510
7.2	トーラス符号	510
7.2.1	トーラス符号の構成	510
7.2.2	誤りと検査演算	512
7.2.3	誤り検出とその修正	513
7.2.4	修正限界の登場	514
7.3	トーラス符号での修正限界	515
7.3.1	修正限界評価	515
7.3.2	スピングラス表現	516
7.4	最後に	518
8	まとめと今後の展望	519

1 序論

1.1 問題設定

スピングラスとは何か。磁性体内に不純物が入り混じった事による複雑な相互作用により現れる新たな秩序状態を指す。このスピングラスの研究の一番大きな潮流は、複雑な相互作用を模型化して平均場理論を構築するところから始まったといえる。通常の磁性体とは異なった複雑な相互作用の効果を考慮にいたした平均場理論を構築せざるを得なかった。しかしそこから始まった一連の研究により、理論的にもスピングラスの性質が明らかにされて、実験に現れるいくつかの現象を説明する事に成功していった。しかしそのスピングラスの平均場理論を越えて、真に現実の物質に対応するような有限次元系のスピングラスを解析的に理解しようとなると話は別であり、どうやら今のところ平均場理論により理解されたスピングラスの性質がそのまま受け継がれる訳でもないようだ。ようだと表現したのは、現在もなおその点について、手を変え品を変え議論がまさに続いているからである [1, 2].

そのようなスピングラスの有限次元での性質の理解に直接的に切り込むわけではなく、本解説記事がまず問題として取り上げるのは非常に小さな問題である。

有限次元のスピングラス模型において、ある特別な臨界点を求める。

なぜこのような問題に取り組むのか。まずスピングラス模型を取り扱う系統的な解析手法は数少ない。繰り込み群や現象論に基づいた解析は多くあるものの、より正確に模型から出発した素朴な解析手法はない。そのため歴史的には有限次元のスピングラス模型の研究というのは、数値

計算に頼ってきた。逆に言えば、上記に挙げた些末な問題でさえも人類は自らの手で答えることが出来なかった。上記のように“特別な”と表現された臨界点では、スピングラス模型特有の対称性があり、解析的に非常に性質がよい事も知られている。しかしそのような非常に性質がよい舞台であっても、我々は手に負えなかったのである。非常に小さい事柄であっても、こういうところを切り口にしてスピングラス模型を取り扱う解析的な理論を構築していこう。そういう理由で上記の問題を主軸に置く。

しかし結果として手に入る情報やその特別な臨界点を求めるために定式化された手法は、その適用範囲を大きく広げて、小さい話題にすぎなかった枠から飛び出す。ひとつの大きな発展は、特別な臨界点だけではなく、有限次元のスピングラス模型の相境界全体の構造にまで言及できる解析的手法である事が分かる。

1.2 スピングラス模型

具体的に取り組んでいく前に、馴染みの薄い読者に対してもう少し有限次元のスピングラス模型に対する背景を紹介しておこう。

まずスピングラスと呼ばれる対象についてであるが、磁性体合金に対する実験において観測された不思議な振る舞いの発見に端を発する。典型的な物質例として挙げられるのが、CuMn であり、一般には貴金属 (Au, Ag, Cu, Pt など) に少量の遷移金属 (Fe, Mn など) を混ぜたものでスピングラス特有の現象が観測できる。顕著に見られる現象のひとつとして挙げられるのは、帯磁率のカスプや比熱の広いピークである。比熱を見ると相転移のようには見えないが、磁場に対する応答で明らかな特異性が見られるという訳である [3]。

このスピングラス特有の現象は、少量の遷移金属を混合する事に起因している。その少量の遷移金属原子の中に局在する電子スピンモーメント間の相互作用が、貴金属原子の中で複雑に方向を向いた電子スピンモーメントを介して行われる。その結果として以下のような関数形を持った複雑な RKKY (Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida) 相互作用

$$J_{ij} = \frac{\cos 2k_F r_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (1)$$

をするためにスピングラス特有の現象が生じることが明らかにされた [4, 5, 6]。ここで i, j というラベルは遷移金属原子の局在スピンモーメントを区別するために付した。そして J_{ij} は局在スピンモーメント間の相互作用を表す。また k_F はフェルミ波数であり、 r_{ij} がスピンモーメント間の距離をあらわす。この RKKY 相互作用の特筆すべき特徴は、距離によってその相互作用の符号を変えるところである。

このような相互作用をする電子スピンを模型化することでスピングラス模型を構築することが出来る。まず遷移金属の局在電子スピンを格子点上に配置する事による模型化を考える。遷移金属原子は少量だけ貴金属の中にランダムに位置しているような状況を考えると、格子点におくスピンをランダムに配置して、そのスピン間には RKKY 相互作用があるものとして考えるのがもっともらしい。しかし一般に長距離型相互作用をする模型の扱いは難しい。そこで符号を変えるとい RKKY 相互作用の本質的な部分を取り出した上で、短距離相互作用をするものとして近似する。その際にランダムに局在スピンが位置している事を反映させるために相互作用の符号をランダムにする。局在スピンの向きが変化する速さと相互作用の大きさや符号が変わる速さの違いを考慮すると、後者は合金の中での原子配置による構造で決まるため、その速さは前者に比べて非常に遅い。そのため相互作用の大きさや符号を固定した上で、局在スピンの状態の変化を考慮し

た解析をするクエンチ型のランダム系を考える。逆に相互作用についても局在スピンの同程度の速さで変化する極限はアニール型のランダム系と呼ばれる。

このようにしてモデル化されたクエンチ型のスピングラスモデルを本解説記事では扱っていく。その中でも一番素朴な Ising スピン変数を用いた、ランダムボンド型の Ising 模型をまずは取り扱う事にしよう。系のハミルトニアンは、

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \quad (2)$$

で記述される。ここで S_i は 2 値の離散的な値 ± 1 を取る Ising 変数である。格子点におかれた電子スピンの最近接間のペアについて和を取る添え字 $\langle ij \rangle$ が空間構造をあらわす。有限次元のスピングラス模型というのは、電子スピンを配置する格子点の部分について有限次元の空間構造を与えることを指す。そして J_{ij} が RKKY 相互作用と希釈された遷移金属の局在スピンの存在を反映したランダムな相互作用を表す結合定数である。もしも完全な強磁性体であれば、スピンの向きが互いに揃う傾向があるために $J_{ij} = J > 0$ とすればよい。少し欠陥があれば、ランダムに $J_{ij} = 0$ となるように考えてもよいだろう。そのようなモデルをボンド希釈型の模型と呼ぶ。スピングラス模型では、この J_{ij} の部分に、適当な確率分布に従うランダムな変数を与えて解析していくことを考える。特に符号が変わる事で、強磁性相互作用 ($J > 0$) と反強磁性相互作用 ($J < 0$) が混在するように考えるところが重要である。例えばガウス分布や離散的な 2 値 $\pm J$ を取る $\pm J$ 型の分布などである。この混在こそが、RKKY 相互作用の内、スピングラスに本質的に効く要素であるという近似を行ってモデル化をしている。上記の模型は特にスピングラス模型の解析の道筋を切り開いた基本的な模型として知られる。実際にこのモデルを先駆的に解析した二人の名を冠して、Edwards-Anderson 模型とも呼ばれている [7]。

1.3 相図

一番簡単な例で、 $\pm J$ 型の分布を考えた場合の相図を例にして、スピングラス模型の様子を概観してみよう。相互作用 J_{ij} の強さは同じ大きさであり、符号 τ_{ij} についてだけランダムな以下のような分布を考える。

$$P(\tau_{ij}) = p\delta(\tau_{ij} - 1) + (1 - p)\delta(\tau_{ij} + 1). \quad (3)$$

ここで p は強磁性相互作用の割合を示す。すると容易に分かることは $p \rightarrow 1$ の極限では良く知られた強磁性 Ising 模型、また逆の極限で $p \rightarrow 0$ を考えると完全な反強磁性 Ising 模型に対応する事がわかる。さて、では $0 < p < 1$ の領域ではどうなるであろうか。段々と強磁性相互作用を減らして、反強磁性相互作用の割合を増やしていくと、強磁性相を壊すように反強磁性タイプの秩序を作る効果が現れる。そのため強磁性相を保つことが難しくなる。相図で書き表すと、 p の減少と共に強磁性相が低温部分へとその領域を変化させていく。(図 1) しかし反強磁性相互作用をさらに導入していくと、強磁性相互作用との間に競合状態が出来る。これをフラストレーションと呼び、空間的な秩序は壊してしまうが二種類の相互作用の競合によってスピンの向きが時間的には変動しにくいガラス的な様相を形成する [8, 9]。これがスピングラス相である。高温では熱揺らぎが大きいためそのような秩序状態を作る事は出来ないが、低温では強磁性相同様に安定的な相として存在する。しかしその事が完全に分かっているのは平均場理論の範疇でのみである。有限次元のスピングラス模型の場合、図 1 にあるような相図は大規模な数値計算の長年にわたる研究の成果として得られたのだ。我々が議論するのは、この相図の構造を出来るだけ解析的に明らかに

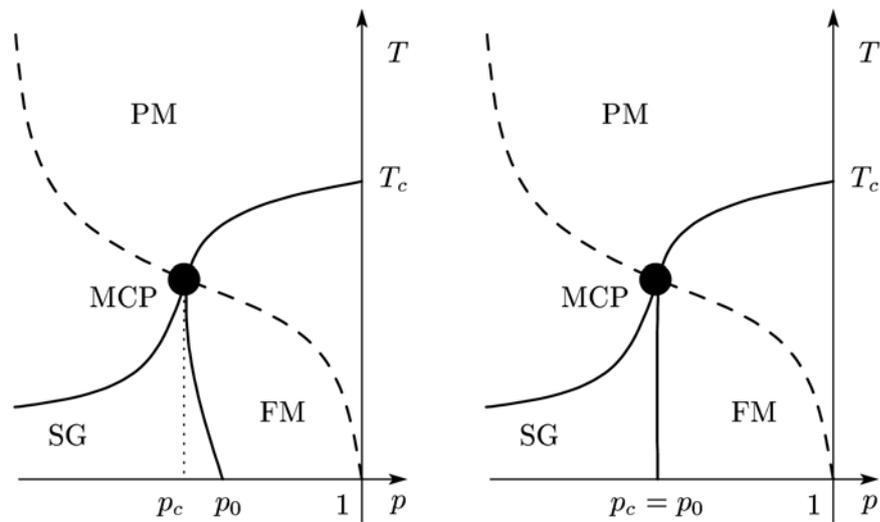


図 1: 考えられている $\pm J$ Ising 模型の相図. 実線が相境界を表す. FM は強磁性相を表し, PM が常磁性相を表す. SG がスピングラス相を表し, 低温にわたって存在する. 実線は相境界である. 破線が西森線を表しており, 多重臨界点は西森線上の点で表されている. 左側はリエントラント転移 ($p_c \neq p_0$) がある場合. 右側は相境界が西森線以下では垂直 ($p_c = p_0$) になるとする場合である.

する事である.

これまでのスピングラス理論の中で, その問題に取り組んだ一例を挙げる. 相図の構造を極めて美しい形式の解析的な理論で, 制限したのが西森によるゲージ変換の方法である [10, 11]. ゲージ対称性と呼ばれる局所的な対称性を利用した解析方法により, 厳密にランダムボンド型の Ising 模型など広く一般的なスピングラス模型の内部エネルギーの値を計算する事が出来る. 内部エネルギーだけではなく, 比熱に関する上限, また相関関数についても等式や不等式などいくつかの厳密な関係を与える事が出来る. そのような特別なゲージ対称性の備わった部分空間の事を, **西森線**と呼ぶ. 図 1 にあるように強磁性相と常磁性相に渡って相図を走っている曲線の事である. この西森線上の相転移点は, 強磁性相, 常磁性相, 及びスピングラス相を隔てる相境界の交点である事から**多重臨界点**と呼ばれる. 西森線上のゲージ対称性を利用した一連の成果により, 一部のスピングラス模型の相図について以下のような厳しい制限が与えられた.

“西森線より下側では強磁性相とスピングラス相 (もしくは常磁性相) の相境界は温度軸に平行もしくはランダムネスが少ない領域へ入り込む.”

しかしながら, ゲージ変換の方法では, 相転移の位置がどこにあるかという定量的な疑問について答える事ができなかった. もしも定量的に相転移に関する情報を得る事が出来れば, 数値計算の結果の信憑性について評価する事が出来る. 答を知らない問題なのだからその信頼度については厳しく評価する必要がある. またより实际的に, 数値データから臨界現象の指標である臨界指数を正確に見積もるために, 正確な相転移点の位置を知る事は大きな意味がある. スピングラス模型の臨界指数については, いまだ決着を見ない未解決問題もある. そういった意味で, 極めて些細な問題であっても相転移点を正確に求める事は, 間接的にスピングラスの理論的研究を前進させていく役割があるのだ.

本解説記事では, 前半部分としてその相転移点を求める理論について紹介したのちに, その手法で得られた結果について述べる. せっかちな一部の読者のために結果として何が得られたのか

を以下に簡単に紹介しよう。

まず第一に、西森線上での相転移点、**多重臨界点の位置を非常に良い精度で計算する事に成功した**。この多重臨界点の位置に注目する理由は、数値計算による結果が非常に豊富であるためにベンチマークテストとしての役割を果たすためである。そして第二に、**2次元のスピングラス相が存在するかどうかについて、解析的に議論することが出来た**。具体的には、2次元の正方格子等では、さきほどの± J 型のランダムさにおいて、 $p = 1/2$ のような対称的な分布をしている場合ではスピングラス相が有限温度にわたって存在しない事がわかった。この事実は、すでに数値計算で検証された範囲内では知られていた事であるが、解析的にしっかりとした理論で示した例は存在していない。

最後に、反強磁性相互作用を導入する事によって、強磁性 - 常磁性転移温度が減少していくが、その減少具合を測る**相境界の傾きを厳密に求める事に成功した**。この問題は、相図の構造そのものの興味という側面もあるが、ランダムさが臨界現象にどのように効果を及ぼすのかという問題にも直結している。特にこの相境界の傾きについては、厳密解と称される既存の結果が存在する。しかしそれを覆す事に成功した意味でも非常に大きい成果である。

些細な問題のようで非常に大きい影響があることが判っていただけただろうか³。

2 有限次元のスピングラス理論

2.1 フラストレーション

それでは、ここからスピングラス模型の性質を少しずつ具体的に見ていくことにしよう。スピングラス模型の解析を難しくしているものであり、そして一番本質的な効果を与えているフラストレーションについて紹介する。

このフラストレーションと呼ばれる性質は、低温でのスピングラス模型の振る舞いに対して顕著にその効果を生み出す。具体的な例として、図2にあげるような正方格子上の4つのスピン系を考える。結合定数が J というように大きさは一様であるとして、符号だけ一様ではない、つまり強磁性相互作用(+ J)と反強磁性相互作用(- J)の両者が現れているとする。この小さな系で基底状態を考えてみよう。まず点線で表す反強磁性相互作用が奇数本存在する場合を考えてみる。スピンの方向を同じ方向へとそろえようとする強磁性相互作用(+ J)と反平行に揃えようとする反強磁性相互作用(- J)の競合が起こり、必ずしも全てのペアに関してエネルギーを最小化したわけではない状態が基底状態として現れる。さらにいくつかの縮退した状態が現れる。この縮退した状態というのが、通常のIsing模型に現れるような反転対称による縮退した状態ではないことが重要である。偶数本の反強磁性相互作用の場合にはそのような競合状態と縮退は現れない。この格子点から形成される基本図形内に反強磁性相互作用の数が奇数の時、フラストレーションがあると呼ぶ。そしてこのフラストレーションの存在により、エネルギーの低い状態において、いくつかの縮退した状態が現れる。このフラストレーションが多数存在することにより、低温におけるスピングラス模型の自由エネルギーの構造が図3のような非常に複雑な多谷構造となると考えられる[12, 13, 14, 15]。通常の磁性体に見られるような反転対称性に関係した谷の構造ではないために、低温では強磁性相とは異なる秩序状態、スピングラス相が現れる事を反映している。平均場理論による理解では、沢山ある谷と谷の間には無限の高さの障壁がある事がスピングラス相の特徴である。系がある谷に落ち込んでしまうと抜け出すのに無限の時間が必要となる意味で、時間

³後輩たちに向けて言うと、筆者も研究当初はそこまで意識はしていなかった。しかし研究がいくらか進むと自分の立場をはっきりさせないと更には進めなくなる。必ず自分の研究の役割を確認しながら日々邁進してもらいたい。

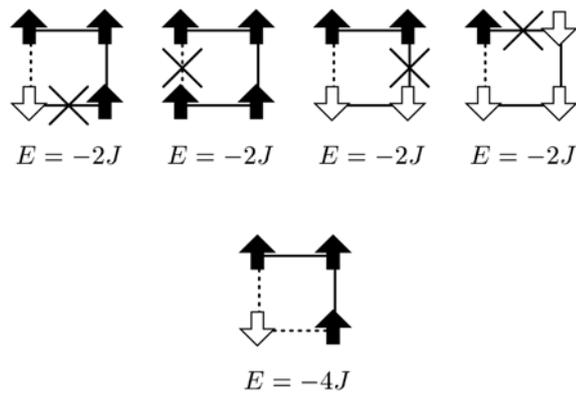


図 2: 4つのボンドからなる系でのフラストレーションの様子. ひとつだけ反強磁性相互作用を導入した場合が上の図. 下の図は反強磁性相互作用が2本あるとした場合. \times 印が付いているのが, 局所的に励起している ($-J_{ij}S_iS_j = J$) 部分を表す.

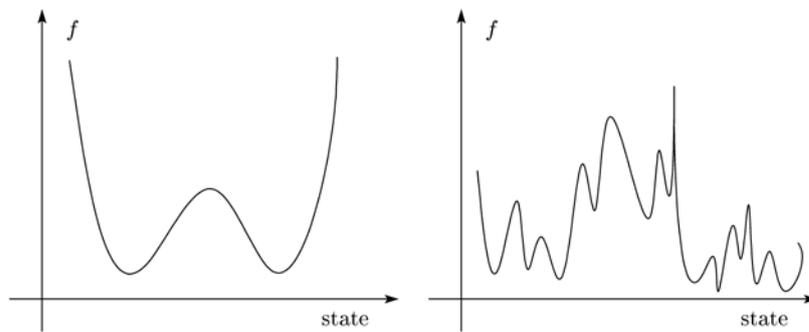


図 3: 自由エネルギーの多谷構造. 左側には強磁性体の自由エネルギーの構造を, 右側にはスピングラスの平均場描像による多谷構造をそれぞれ表す. .

的な秩序状態に入っていると考えられるのだ. このフラストレーションを定量的に表すには, J_{ij} の符号部分 τ_{ij} だけを用いて,

$$f(C) = \prod_{(ij) \in C} \tau_{ij} \quad (4)$$

として, 基本図形 (例に挙げた図 2 の場合は正方形) の周囲について符号の積を取ることにすればよい.

2.1.1 ゲージ対称性

さて本解説記事の問題となる多重臨界点が存在する部分空間に備わっているのがゲージ対称性である. このゲージ対称性はフラストレーションと深く関わっている. 両者の関係をここで明らかにしよう. ランダムボンド型の Ising 模型のハミルトニアン (2) を再び思い出そう. このハミ

ルトニアンは以下で定義されるゲージ変換について不変であることが知られている。

$$\tau_{ij} \rightarrow \tau_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad (5)$$

$$S_i \rightarrow S_i\sigma_i. \quad (6)$$

ここで τ_{ij} は相互作用の符号を指す。また σ_i はスピン変数のように -1 か $+1$ のどちらかを取る量である。容易に分かるように $\sigma_i^2 = 1$ であるので、ハミルトニアン (2) がゲージ変換にたいして不変であることが以下のように示される。

$$H_G = - \sum_{\langle ij \rangle} J\tau_{ij}\sigma_i\sigma_j S_i\sigma_i S_j\sigma_j = H. \quad (7)$$

添え字にある G がゲージ変換後の量を表している。この対称性は熱平均を考えた場合でも保たれる。ゲージ変換によって生み出される効果は、所詮和の順番の入れ替えにしか過ぎない。そのためゲージ不変な量の熱平均は、もちろんゲージ変換に対して不変である。

しかし扱っているクエンチ型のランダム系を特徴付ける J_{ij} の分布関数には注意が必要である。例えば $\pm J$ の 2 値を取る場合は $\pm J$ Ising 模型と呼び、特にその符号に注目して τ_{ij} に対する分布関数 (3) は、以下のように指数関数を用いて書き表すことが出来る。

$$P(\tau_{ij}) = \frac{e^{K_p\tau_{ij}}}{2 \cosh K_p}. \quad (8)$$

ここで $e^{-2K_p} = (1-p)/p$ と定義した。この $\pm J$ Ising 模型の場合は、ゲージ変換により以下のように変わる。

$$P_G(J_{ij}) = \frac{e^{K_p\tau_{ij}\sigma_i\sigma_j}}{2 \cosh K_p}. \quad (9)$$

ゲージ変換後の形は元の形とは異なるが、よく見てみるとランダムボンド型の Ising 模型における最近接ペア間だけの局所的な Boltzmann 因子 $\exp(\beta J\tau_{ij}S_iS_j)$ と逆温度の部分だけが異なる格好をしている。この性質をうまく使う事により、有限次元のスピングラス模型の解析を行うことが出来る。上記の考察の流れはガウス分布を用いる場合も同様にして行うことができる。

2.1.2 フラストレーションとゲージ変換

式 (4) で定義したフラストレーションはゲージ変換に対して不変な量である事がすぐに示される。

$$f_G(C) = \prod_{(ij) \in C} \tau_{ij}\sigma_i\sigma_j = f(C). \quad (10)$$

ゲージ変換というのは、要するにスピンの向きを基準を一斉に各格子点で変えたことに相当する。その向きの変化は各格子点で独立に考える。つまりゲージ変換は、熱平均を取る際に考慮するようなスピン変数の全ての組みあわせの間での変換といえる。それに対してスピングラスという特別な秩序状態、自由エネルギーの極小の谷の形成に一番強く関わっていると考えられるフラストレーションの影響を変えない。つまり与えられた $\{\tau_{ij}\}$ のパターンごとに自由エネルギーの構造が決まっているといえる。そこでフラストレーションと自由エネルギーの構造との関係をもう少し見てみよう。

具体的に考えるために $\pm J$ Ising 模型の場合について考えてみよう. 定義どおり自由エネルギーを考えると, 評価するべきは

$$-\beta F(\{\tau_{ij}\}) = \log Z(K; \{\tau_{ij}\}) \quad (11)$$

である. ここで, 分配関数 $Z(K; \{\tau_{ij}\})$ は,

$$Z(K; \{\tau_{ij}\}) = \sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} \exp(K \tau_{ij} S_i S_j) \quad (12)$$

で与えられる. $K = \beta J$ として逆温度と相互作用定数を簡単のため一緒にして扱う事にする. しかしながら典型的なパターン $\{\tau_{ij}\}$ が与えられた自由エネルギーを評価する事が非常に難しいため, $\{\tau_{ij}\}$ についての平均, **配位平均**を取る事を考える.

$$-\beta F = [\log Z(K; \{\tau_{ij}\})]_{\text{av.}} \quad (13)$$

ここで, $[\dots]_{\text{av.}}$ は配位平均を表す. この平均値は熱力学的極限では典型的なパターンに対する自由エネルギーと等価であることが知られている. これを自己平均性と呼び, ランダムスピン系の解析の礎となっている. さらに解析を推し進めていこう. 自由エネルギーは, 配位平均を行う事に注意すると分布関数 (8) を利用して, 以下のように書き表される.

$$-\beta F = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} e^{K_p \tau_{ij}} \log Z(K, \{\tau_{ij}\}). \quad (14)$$

右辺に現れた量にゲージ変換を適用する事を考える. 分配関数はハミルトニアンで記述されるためにゲージ変換に対して不変である事に注意すると,

$$-\beta F = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} e^{K_p \tau_{ij} \sigma_i \sigma_j} \log Z(K, \{\tau_{ij}\}) \quad (15)$$

を得る. そこでさらにゲージ変数 $\{\sigma_i\}$ について両辺で和をとることを考えると, 右辺に現れている指数関数部分が局所的な Boltzmann 因子と等価であることから,

$$-2^{N_s} \beta F = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z(K_p, \{\tau_{ij}\}) \log Z(K, \{\tau_{ij}\}), \quad (16)$$

となる. 最終的に自由エネルギーは,

$$-\beta F = \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z(K_p, \{\tau_{ij}\}) \log Z(K, \{\tau_{ij}\}), \quad (17)$$

となる事がわかる. ここで $K_p = K$ とすると, 丁度 $S(x) \equiv -\sum x \log x$ というエントロピーの形で自由エネルギーは書けることが分かる. 右辺に現れる量 $Z(K_p; \{\tau_{ij}\})$ は, ある固定された $\{\tau_{ij}\}$ の分布に対しての分配関数であるという側面もあるが, 一方でゲージ変換で移れる $\{\tau_{ij}\}$ の組み合わせについての $P(\tau_{ij})$ についての和であるという側面もある. すなわちゲージ変換で関係付けられる合計 2^N 個に及ぶ $\{\tau_{ij}\}$ のパターンの出現確率を表している. これは即ちで格子上で同じフラストレーション分布で表現される幾何学的パターンの出現確率とも考える事が出来て, 別の視点での理解を与えてくれる. 関数形と上記の事実からゲージ対称性を持つようなハミルトニアンを持つスピングラス模型の自由エネルギーは, フラストレーションの分布のエントロピーで記述さ

れるということがわかった. そしてここで指定した条件 $K_p = K$ が西森線の条件式である. この西森線上では同様のゲージ変換による計算により, 有限次元のスピングラス模型であっても厳密な解析を行うことが出来る. 詳しくは付録 A に譲るとして, 例えば内部エネルギーの厳密解, 比熱の上限評価や幾つかの相関等式, 不等式を示すことが出来る. 一例として, 以下の相関不等式というものがある.

$$|[\langle S_i S_j \rangle]_{\text{av.}}| \leq |[\langle \sigma_i \sigma_j \rangle]_{\text{NL}}|. \quad (18)$$

左辺は任意の温度, 任意のランダムさによるスピン間相関の熱平均 $\langle \dots \rangle$, 配位平均 $[\dots]_{\text{av.}}$ を表す. 一方で右辺は同じランダムさを有する西森線上でのスピン間相関の熱平均と配位平均を表す. 同じランダムさがある場合に異なる温度での相関をスピンの向きのみで比較すると西森線上が一番揃うところであると, この不等式は示している. 図 1 を縦に切って眺めてみるとよい. すなわち西森線上で強磁性相であれば, 他の温度で強磁性相や常磁性相, スピングラス相が許される. しかし西森線上で常磁性相であったりスピングラス相であれば, 西森線以下では強磁性相は許されないということである. つまり上記の相関不等式から, 任意の次元, 格子で西森線よりも下では, 相境界は垂直もしくは強磁性側に入り込むリエントラント転移しか許されない事が示される [10, 11]. 相図の構造について任意の次元, 任意の格子について言及する極めて強い制限である. しかしながら残念な事に, 相転移の場所がどこにあるかについては答えてくれないという問題もある. 正直言って欲張りな要求かもしれない. 任意の次元で, 任意の格子で極めて一般的に, そして厳密に証明できるという上記の例はスピングラスの問題に関しては皆無だったのだから. しかし本解説記事では, 特定の問題にせよ, その相転移の位置を決定できることを示す.

2.2 レプリカ法による解析

スピングラスの解析が通常磁性体のものと異なる点は, ランダムな相互作用の影響を配位平均という操作で考える必要があるところだ. 分配関数を計算するための処方箋であるカノニカル分布を用いた熱平均だけではないのだ. 各 $\{\tau_{ij}\}$ の配位に対して分配関数を計算して, 対数を通しての平均 (13) を取ることは一般には非常に難しい. そこで取られる戦略のひとつが, レプリカ法と呼ばれる一連の操作である. 対数関数に対する恒等式を利用して, 以下のように問題を置き換える.

$$[\log Z(K; \{\tau_{ij}\})]_{\text{av.}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z^n(K; \{\tau_{ij}\})]_{\text{av.}} - 1}{n}. \quad (19)$$

ここで現れる n をレプリカ数と呼び, 評価をする際には自然数とする. 具体的には, 同じ相互作用の分布を持つ n 個のコピーされた系の分配関数 ($\{S_i^\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) からなるスピン系) を評価すると考える. (図 4) 一連の評価を終えたら $n \rightarrow 0$ の解析接続を考慮した極限を取り, 自由エネルギーの評価とするのである.

このレプリカ法を用いることによって平均場レベルでは, Sherrington と Kirkpatrick らの先駆的な研究 [16] から始まり, 細部に渡るまでスピングラスの性質を理解することに成功している. 特に新規の概念として生まれたのがレプリカ対称性, その対称性の破れによるスピングラス相の分類である. 上記で紹介したようなレプリカ法により, レプリカ数によって表現される擬似的な空間方向が追加される [17, 18, 19, 20]. 強磁性相では実空間に渡り秩序が形成される. そこで以下のように定義される秩序パラメータ, 磁化の立ち上がりが見られることにより特徴付けられる.

$$m = \frac{1}{N} \sum_i S_i. \quad (20)$$

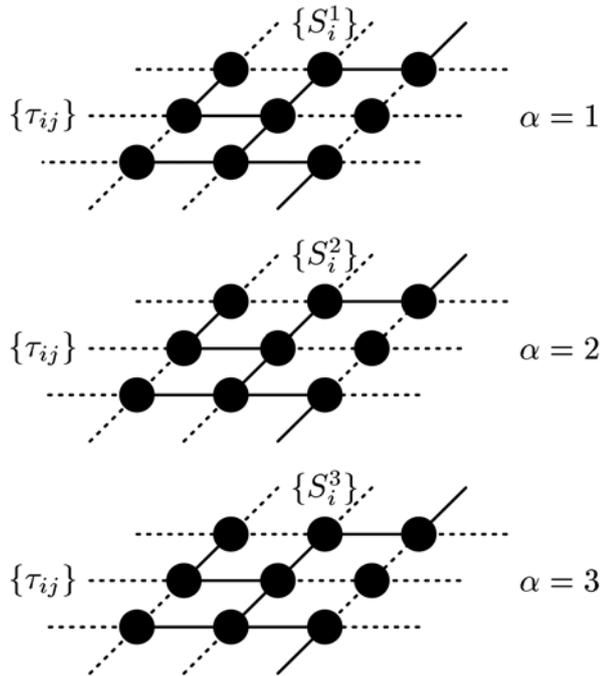


図 4: $\pm J$ Ising 模型のレプリカ法による有効スピン模型. 破線が反強磁性相互作用を表し, 実線が強磁性相互作用を表す.

一方, スピングラス相はレプリカ法で現れた擬似的な空間に渡る秩序によるもので特徴付けられる. 具体的には以下で定義されるようなスピングラス秩序パラメータで特徴付けられる.

$$q = \frac{1}{N} \sum_i S_i^\alpha S_i^\beta. \quad (21)$$

スピングラス相は空間的な秩序が崩れているので, 強磁性秩序パラメータは $m = 0$ である. しかしスピングラス秩序パラメータは 0 ではない有限の値を持つということで特徴付けられる. 素朴にはレプリカ対称な $S_i^\alpha = S_i^\beta$ という状況が考えられるが, レプリカ法による擬似的な空間内部で複雑な計量空間を伴った構造が発現することがある. Parisi によって提唱されたレプリカ対称性の破れである [21, 22, 23]. これらのレプリカスピン間の重なりと, その重なり方に見られる複雑な構造の考察によって, 平均場理論の範囲内ではスピングラス相やそのスピングラス相内での性質を理解する事に成功している.

しかしながらこれらの平均場理論での理解が, 有限次元におけるスピングラス模型の性質に通用するかはいまだ解決を見ない難問である. レプリカ法によるスピングラスの描像が成り立つのかすらも, いまだ結論を迎えていないのである. そのため有限次元においてスピングラス模型を対象とした解析を行うには, スピングラス相そのものを即座に扱うのは危険であろう. また平均場理論の結果に対する印象に捕らわれた考えを以って進めて行くことも危険である. まずはスピングラス模型の起こる相転移一般をスピングラス相に関連すること以外であってもいいから, 素朴にひとつひとつ考えていこうというスタンスを取る. もちろん最終目標は有限次元におけるスピングラス模型の本質的な理解であるから, スピングラス特有の性質は少なからず取り入れた理論を考えていこう.

2.2.1 レプリカ法と有効 $\pm J$ Ising 模型

実際にまずは有限次元のスピングラス模型においてレプリカ法を用いて、配位平均 (13) を少し具体的に考えてみよう. 有限次元であっても, 基本的操作には変更点はない. ここでも $\pm J$ Ising 模型を例にして考えてみる. レプリカスピン $\{S_i^\alpha\}$ を用いて, 分配関数を n 乗したものは,

$$Z^n(K; \{\tau_{ij}\}) = \sum_{\{S_i^\alpha\}} \prod_{\langle ij \rangle} \exp \left\{ K \tau_{ij} \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha \right\} \quad (22)$$

で与えられる. そして更に $\{\tau_{ij}\}$ についての配位平均を考えてみると以下のような式を得る.

$$[Z(K, \{\tau_{ij}\})^n]_{\text{av.}} = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K_p \tau_{ij}} \exp \left\{ K \tau_{ij} \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha \right\}. \quad (23)$$

相互作用がボンド上で 2 体相互作用をするのみである場合, 上記のようにボンド 1 本当たりの局所 Boltzmann 因子に分解することが出来る. 先に配位平均を取ってしまうと, ランダムさによる効果はこの局所 Boltzmann 因子に押し込めることが出来る. 実際に局所 Boltzmann 因子を評価してみると,

$$\frac{1}{(2 \cosh K_p)} \sum_{\tau_{ij}} e^{K_p \tau_{ij}} \exp \left\{ K \tau_{ij} \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha \right\} = \frac{\cosh \left(K_p + K \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha \right)}{\cosh K_p} \quad (24)$$

となる. この中には強磁性模型で現れるような単純な格子点間の 2 体相互作用ではなく, レプリカ数が異なるスピン間の相互作用も含まれている. この局所 Boltzmann 因子によって表されるのは, レプリカ法によってランダムさを考慮したいわば有効 $\pm J$ Ising 模型である. 実際に考えている空間次元に並んでいるだけでなく, レプリカ数に応じた分だけスピンが配列した有効的な古典スピン系を考える必要があることがわかる. その点が 2 次元以上の有限次元のスピングラスの解析を困難にしている理由のひとつである.

一般のレプリカ数 n について解析は非常に困難であるが, 2 次元の $n = 1$ と $n = 2$ の自然数のレプリカ数を持つ系であれば厳密解がある. まずレプリカ数が 1 である場合, これは有効的には 2 次元の強磁性の Ising 模型で記述できる. ボンドの両端が揃っている場合と逆向きの場合の局所 Boltzmann 因子の比を強磁性の Ising 模型の場合のものと対応させる事が可能であるためだ. そこで 2 次元の正方格子上での強磁性 Ising 模型の臨界点についての厳密解を用いれば, 相境界を表す関係式を得ることが出来る. 同様にしてレプリカ数が 2 である場合の分配関数は, 有効的に 2 次元の Ashkin-Teller 模型の分配関数で記述できる事がわかる. Ashkin-Teller 模型に対する既存の結果を利用することで, やはり厳密に相境界を描く事が出来る [24].

残念ながら, 繰り返しにはなるが, 一般のレプリカ数 n に関してはこのような厳密解は存在しない. レプリカ法を利用したとして, ランダムな相互作用を有効的に別の模型に移せたとしても, その解析手法をさらに考える必要がある.

2.2.2 異なるレプリカ数間の関係式

レプリカ法を単純に利用したからといって, 有限次元のスピングラス模型を解析する事は非常に難しい. しかしながらゲージ変換を行う事で多少は非自明な情報をレプリカ法による定式化か

ら得ることが出来る．再び $\pm J$ Ising 模型を例に挙げて，まず分配関数の n 乗されたものの配位平均をされたものを考える．

$$[Z(K, \{\tau_{ij}\})^n]_{\text{av.}} = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K_p \tau_{ij}} Z(K, \{\tau_{ij}\})^n \equiv Z_n(K, K_p). \quad (25)$$

自由エネルギーをフラストレーションのエントロピーで書き換えたときのように，このレプリカ法に現れる分配関数に対してゲージ変換とそのゲージ変数に対する和を取ると以下のような関係式を得ることが出来る．

$$Z_n(K, K_p) = \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z(K_p, \{\tau_{ij}\}) \cdot Z(K, \{\tau_{ij}\})^n. \quad (26)$$

すると異なるレプリカ数ではあるものの，西森線上 ($K = K_p$) における $Z_n(K, K_p)$ と非常にランダムさが強い極限である ($K_p = 0, p = 1/2$) の $Z_{n+1}(K, 0)$ が自明な係数を除いて等しいことが分かる [24]．

$$2^{N_s} (2 \cosh K)^{N_B} Z_n(K, K) = 2^{N_B} Z_{n+1}(K, 0). \quad (27)$$

この結果は，ゲージ変換とレプリカ法を用いただけであるので，任意のレプリカ数，次元，格子において成立する．ここでは具体例として $\pm J$ Ising 模型を用いたが，西森線が存在するような模型であれば成立する．この関係式から分かることは，左辺に現れる $Z_n(K, K)$ において特異性が西森線上 (K, K_p) = (K_c, K_c) に存在する場合，右辺に現れる $Z_{n+1}(K, 0)$ も同じ K_c を用いて，(K, K_p) = ($K_c, 0$) に特異性があらわれる．注意したいのはレプリカ数がひとつだけずれていることである．先の節であげた $n = 1$ と $n = 2$ の例で，相境界を実際に比較してみると上記の関係式の主張が成立していることが分かる．この異なるレプリカ数間の分配関数の関係式は，レプリカ数の異なる分配関数の性質から本来知りたい情報を抜き出すことで相図の特徴を明らかにする事が出来ることを示唆している．

有限次元のスピングラス模型に適用可能な，しかも非常に一般的で系統的な手法はこんな具合である．系統的ではなく，個々の問題に対して力づくに求めようとするのはいくらもあるであろう．(例えば摂動展開，高温展開，繰り込み群の方法など.) しかしながら，割と広範囲の問題に適用可能な手法となると以上のように限られたものしかない．如何に手が出せない状況であるかが分かってもらえただろうか．

このような有限次元のスピングラス模型を，数値計算ではなく解析的に答を求めようということに挑戦したのが本解説記事で紹介する一連の研究である．その挑戦において軸となる手法を次の節で具体的に紹介する．

3 双対性による解析

この節では古くより知られる古典スピン系での解析法のひとつ，**双対性**と呼ばれる対称性を利用した解析を紹介する．特に2次元の格子上の古典スピン系において，難しい解析をすることなく相転移点を厳密に求めることが出来る非常に強力な手法である．また相転移点直上での内部エネルギーの厳密な値やそこでの比熱の振る舞いについてある程度制限を加えることも出来る．まずは一般的な性質を紹介した後に，具体的な例を挙げて実際に双対変換を用いて臨界点を求めてみよう．

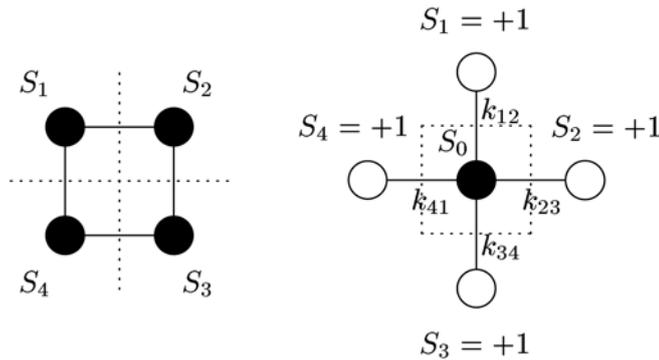


図 5: 4本のボンドを持つ単純な正方格子. 黒丸の部分が和を取るスピンを表す.

3.1 双対性

詳しい計算について述べる前に、双対性とはどのような対称性なのかを簡単に紹介しよう. 分配関数を温度の関数としてみたときに、

$$Z(T) = \Lambda Z(T^*) \quad (28)$$

のように異なる温度 T^* における同じ模型の分配関数との間に等式が見つけられる場合に自己双対であるという. 例えば2次元正方格子の場合、Ising 模型は自己双対であり、この双対性を利用した解析が可能である. その変換規則を与える演算を双対変換と呼び、古典スピン系で以下に説明していくように割と簡潔な方法で行われる. またここで現れる温度の関係式 T^* には非常に面白い関係がなりたっている. 高温から低温へと温度 T を変化させていくと、一方での温度 T^* は逆に低温から高温へと変化していく. もしも一度しか温度に関する相転移がなければ、異なる相での分配関数の間の関係が成り立っていると言える. 相転移点は分配関数において特異性があるところであるから、一度しかない相転移であれば $T = T^* = T_c$ という双対変換の固定点にある事がわかる. よってこの温度の関係を利用することで厳密に相転移点を求める事ができる. また余分に現れる係数 Λ は通常打ち捨てられて紹介されることが多いが、実はこの部分が重要である. 特に相転移点直上での内部エネルギーの値や比熱の振る舞いを評価をする場合には、この Λ を解析する.

3.1.1 単純な例での双対変換

何も知らない読者からすると上記のような異なる温度での分配関数が対応するはずがないと思うかもしれない. そこでまずは一見無駄な例のように思える図5に挙げるような4つのボンドからなる単純な正方格子の Ising 模型の場合で実際にその変換の存在を示してみよう. これは単純な例としての意味だけでなく、後々の解析に対しても双対変換の重要な特徴について教えてくれる. まずこの正方形の格子上での Ising 模型の分配関数を書くと、

$$Z(K) = \sum_{\{S_i\}} e^{K(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + S_4 S_1)} \quad (29)$$

である. 強磁性 Ising 模型は局所的な Boltzmann 因子に注目すると、

$$e^{K S_i S_j} = \cosh K + S_i S_j \sinh K \quad (30)$$

という別表示が可能である。これにより分配関数の中の局所 Boltzmann 因子を展開する。各サイトに置かれたスピン $\{S_i\}$ について和を取る事を考えると、 S_i の奇数乗が現れるような項は消えてしまう。よって S_i^2 のようなスピン変数については偶数次の項のみが残る事がわかる。そのような項は少し書き下してみると、 $\cosh^4 K$ と $S_1^2 S_2^2 S_3^2 S_4^2 \sinh^4 K$ しかない。よって分配関数は、

$$Z(K) = 2^4 (\cosh^4 K + \sinh^4 K) \quad (31)$$

であると分かる。ここで分配関数は見方によっては、再び何かの和に見える。そう $\cosh^4 K$ と $\sinh^4 K$ の和である。つまりこの正方形での Ising 模型は見方を変えると単純な二つの項の和からなる事が言える。しかも $\cosh K$ と $\sinh K$ の関数形から以下のような和としてみる事ができる。

$$Z(K) = \sum_{S_0} (e^K + S_0 e^{-K})^4. \quad (32)$$

4乗というのはボンドの本数から来ている事は分かる。つまり4つのボンドに囲まれた新しいスピン変数 S_0 による分配関数と見る事ができる。無理やり格子状に描くとすると、4つのボンドに囲まれた面の中心にスピンを新たに置き、4本のボンドを改めて $\pi/2$ 回転させて、十字架状にするといふ。(図5)

但し外側のスピンは上向きで一様に固定された境界条件を取るとする。その際に局所的な Boltzmann 因子は

$$e^K + S_i S_j e^{-K} \quad (33)$$

と変化している事に注意しよう。定数倍による変更は分配関数の特異性にはなんら影響を与えないことを考慮すると、強磁性 Ising 模型の元々の局所的な Boltzmann 因子と同じ形で書き直す事ができる。

$$e^K + S_i S_j e^{-K} = \frac{e^K}{\cosh D(K)} (\cosh D(K) + S_i S_j \sinh D(K)). \quad (34)$$

ここで、 $D(K)$ は $\tanh D(K) = \exp(-2K)$ を満たす逆温度である。よって正方形上の強磁性 Ising 模型の分配関数は、十字架上のある境界条件の下での異なる温度の強磁性 Ising 模型の分配関数といえる。

$$Z(K) = \left(\frac{e^K}{\cosh D(K)} \right)^4 Z_D(D(K)). \quad (35)$$

ここで添え字の D は格子の形が変わった事に由来する。

こうしてみると確かに異なる温度の Ising 模型の分配関数と対応する事がわかる。しかしながら同じ Ising 模型ではない。一見すると違う格子の上に置かれており、境界条件も付く。知りたかった双対変換とは様相が異なるではないか、と思うかもしれない。だが我々が解析しようとする相転移の問題は熱力学的極限を取った場合に現れる特異性の問題である。このような有限の大きさの格子上的模型を扱うわけではない。上記の単純な例は双対変換における操作の全てが現れる格好の練習題材に過ぎない。ひとつは局所的な Boltzmann 因子が変化すること。それに応じて有効逆温度 $D(K)$ が定義できる。もうひとつは格子の形が、ボンドに囲まれた面の中心にスピンを置き換える操作が必要なため変わる事。前者の操作は Ising 模型一般に通用する操作である。よくよく見てみると局所的な Boltzmann 因子の変化のルールは、丁度 2 成分の離散的な Fourier 変換に相当している事に気づいた方もいるのではなかろうか。一方後者の操作は、正方格子や他の格

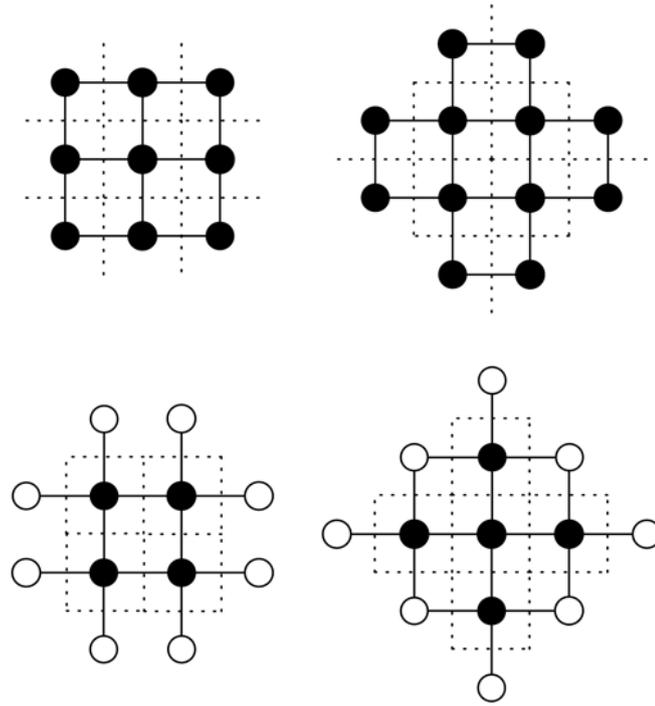


図 6: 双対変換による格子の変化の 2 例. 上側が双対変換前の格子であり, 下側がそれらの双対変換後の格子である. 黒丸で表されたスピンの和を取る部分であり, 白丸のスピンの上向きで固定された条件を課す.

子に対して直ちに実行できる. 単純な正方形を増やした格子の場合について考えてみると図 6 のようになる. さらに熱力学的極限の正方格子や三角格子, 六角格子等の場合について考えてみると, 図 7 のような関係を得る. ここで境界条件は格子のサイズを大きく取れば, 分配関数の評価においては表面での違いなので無視できる事に気づく. しかも正方格子の場合, 面に新たなスピン変数を置いていっても再び正方格子となるので,

$$Z(K) = \Lambda Z(D(K)) \quad (36)$$

なる関係を得る事ができる. つまり双対変換の固定点として $K_c = D(K_c)$ から, 転移点の条件式 $\exp(-2K_c) = \tanh K_c$ を得ることが出来る.

3.2 双対変換の一般的な定式化

それでは一般的な古典スピン模型に対して双対変換を定式化しよう. 一般的に q 個の異なる状態を取ることが出来るような古典スピン系を考えよう. Ising 模型は上向きスピンと下向きスピンの $q = 2$ 状態を取る事が出来る場合に対応している. また 2 体相互作用をしている古典スピン系の模型の場合, 分配関数を以下のように局所 Boltzmann 因子の積の和の形で書くことが出来る.

$$Z[x] = \sum_{\{\phi_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} x_{\phi_i - \phi_j}(K). \quad (37)$$

ここで $\{\phi_i\}$ はスピンの向きを表す量であり, 0 から $q-1$ までを取る. 積は全てのボンドについて取る. ここで使っている x というのはボンド 1 つ当たりの局所的な Boltzmann 因子である. 分配

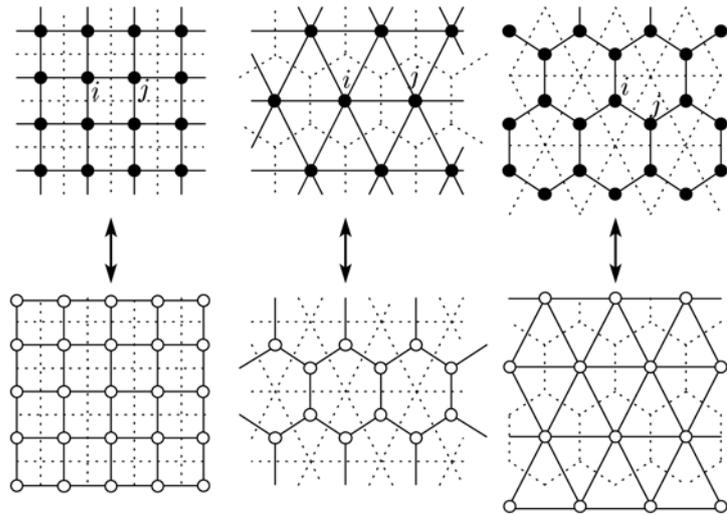


図 7: よく扱われる格子の双対変換の例. 上側の左から正方格子, 三角格子, 六角格子である. 下側にはそれぞれの双対格子を描いている.

関数はこの局所的な Boltzmann 因子からなる項で書き下せるので, その事実を角括弧付きの引数として表すことにする. Ising 模型はボンドの両端にあるスピンの向きが同じ向きを向いていればエネルギーが低くなるような系であるのでハミルトニアンを以下のように表現することが出来る.

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos \pi \phi_{ij}. \quad (38)$$

ここで向きを表す量の差を $\phi_{ij} \equiv \phi_i - \phi_j$ としている. また ϕ_i は 0 と 1 の整数値を取るものとする. 通常の Ising 模型のハミルトニアンの書き方とは異なるが, 応用上便利なので上記のようにする. この場合の分配関数を書き下すと,

$$Z[x] = \sum_{\{\phi_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \cos \pi \phi_{ij}} \quad (39)$$

であり, 局所的な Boltzmann 因子は,

$$x_{\phi_{ij}}(K) = \exp \{K \cos (\pi \phi_{ij})\} \quad (40)$$

であることが分かる.

他にも Potts 模型の場合を考えてみよう. ボンドの両端のスピンの変数が揃った時のみエネルギーが低くなり, それ以外どれだけスピンの変数に違いが現れていても同じエネルギーであるような古典スピン模型である. その Potts 模型のハミルトニアンは以下の形で書ける.

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\phi_{ij}) \quad (41)$$

スピンの向きを表す量の差 ϕ_{ij} は, この場合 0 から $q-1$ までの整数値を取る. この場合の局所的な Boltzmann 因子は,

$$x_{\phi_{ij}}(K) = \exp \{K \delta(\phi_{ij})\} \quad (42)$$

で与えられる. 再び式 (37) のように分配関数がかかる.

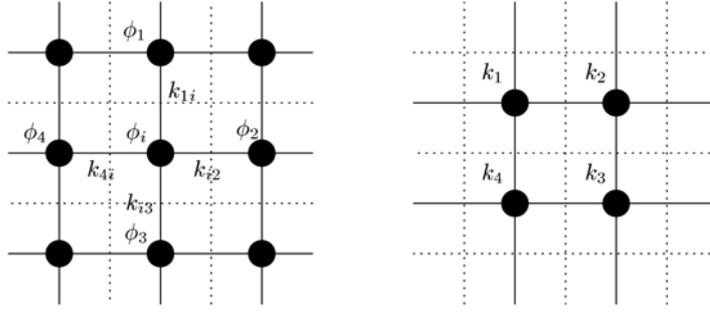


図 8: 正方格子における格子点と面の関係

3.2.1 双対変換の第一段階: Fourier 変換

さて肝心の双対変換であるが非常に簡単である. 第一段階は, 先ほど指摘したように局所 Boltzmann 因子の離散的 Fourier 変換を行う [25].

$$x_{k_{ij}}^* = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\phi_{ij}=0}^{q-1} x_{\phi_{ij}} \exp\left(i \frac{2\pi}{q} k_{ij} \phi_{ij}\right). \quad (43)$$

これを双対局所 Boltzmann 因子と呼ぶことにしよう. 逆変換は,

$$x_{\phi_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{k_{ij}=0}^{q-1} x_{k_{ij}}^* \exp\left(i \frac{2\pi}{q} k_{ij} \phi_{ij}\right) \quad (44)$$

で与えられる.

正方格子上での双対変換を一般的に取り扱ってみる. 分配関数の式 (37) のような表記に対し, 双対局所 Boltzmann 因子 (44) を用いると,

$$Z[x] = \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{N_B} \sum_{\{k_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{square}} x_{k_{ij}}^* \sum_{\{\phi_i\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{square}} \exp\left\{i \frac{2\pi}{q} k_{ij} (\phi_i - \phi_j)\right\} \quad (45)$$

とかける. そこで図 8 に描かれているように, サイト i にあるスピン変数 ϕ_i に関わる量について注目をして, スピン変数に関する和を考えてみる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\{\phi_i\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{square}} \exp\left\{i \frac{2\pi}{q} k_{ij} (\phi_i - \phi_j)\right\} \\ &= \sum_{\phi_i} \prod_i \exp\left\{i \frac{2\pi}{q} (-k_{1i} + k_{i2} + k_{i3} - k_{4i}) \phi_i\right\} = q^{N_s} \prod_i \delta(-k_{1i} + k_{i2} + k_{i3} - k_{4i}). \end{aligned} \quad (46)$$

ここで分配関数に残る和は Fourier 変換によって現れた補助変数 k_{ij} のみである. そしてその補助変数は上で現れた Kronecker のデルタによる拘束条件を満たさなければならない. その条件を満たすように補助変数を以下のように書き直す.

$$k_{1i} = k_1 - k_2, \quad k_{i2} = -(k_2 - k_3), \quad k_{i3} = -(k_3 - k_4), \quad k_{4i} = k_4 - k_1. \quad (47)$$

結果として分配関数はその引数として双対な局所 Boltzmann 因子 x^* を持つもうひとつの正方格子上の模型の分配関数として書きなおす事ができる.

$$\begin{aligned} Z[x] &= q^{N_s - \frac{N_B}{2} - 1} \sum_{\{k_i\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{square(D)}} x_{k_i - k_j}^* \\ &= q^{N_s - \frac{N_B}{2} - 1} Z_D[x^*]. \end{aligned} \quad (48)$$

ここで “square(D)” という積の制限表記は図 5 や図 6 のように境界条件の異なった双対な正方格子について取る事を意味する. 添え字 D についても同様に, 格子の違いを表している. 細かい事ではあるが後々に重要になってくるのが q の指数である. 格子点数 N_s とボンド数 N_B だけでなく -1 というのが現れるが, これは $\{k_i\}$ に関する任意性を除去するために現れる. (補助変数 $\{k_i\}$ と $\{\phi_{ij}\}$ の総数の違いを合わせる.) 当然ながらここで熱力学的極限を考えると $N_s, N_B \rightarrow \infty$ なので -1 という指数は無視できる. また格子の境界条件の違いは無視する事が出来るので Z と Z_D は同じであると見なせる. 結局分配関数の双対変換式 (48) は $N_B = 2N_s$ という正方格子における幾何学的な関係を使うと, 以下のように綺麗に書く事が出来る.

$$Z[x] = Z[x^*]. \quad (49)$$

一般的な表式で考えたので, 少々難しかったかもしれない. しかし事前に行った単純な正方形の場合を思い起こせば, 理解はそう難しくない.

ちなみにこの解説記事では取り扱わないが, 三角格子の場合や六角格子の場合についても同様に双対変換を行う事が出来る. しかしそれらの場合, 正方格子とは異なり, 元の格子とは変わってしまう. 三角格子と六角格子の場合は, 星・三角変換を援用する事で元の格子間で分配関数の関係式が (49) 式と同様に構成できる [26, 27].

3.2.2 双対変換の第二段階：温度の変換

あとはそれぞれの模型毎に具体的な局所 Boltzmann 因子について考慮すればよい. ここでは双対変換の第二段階である温度の変換を考える. 非常に重要な性質であるので, 紙と鉛筆を持って具体的に取り組んでもらいたい.

Ising 模型 まずは簡単な例としてランダムさのない強磁性 Ising 模型を挙げよう. この場合局所 Boltzmann 因子は式 (40) で与えられる. 一方双対な局所 Boltzmann 因子は式 (43) にしたがって計算すれば,

$$x_{k_{ij}}^*(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^K + e^{-K} \cos \pi k_{ij}) \quad (50)$$

で与えられる. ここで今後も登場する重要な量として, **主要 Boltzmann 因子** $x_0(K)$ を導入する. ボンド両端のスピン変数が同じ場合 ($\phi_{ij} = 0$) の局所 Boltzmann 因子として定義する. Ising 模型の場合であれば, $x_0(K) = e^{\beta J}$, $x_0^*(K) = (e^{\beta J} + e^{-\beta J})/\sqrt{2}$ とそれぞれ与えられる. これら主要 Boltzmann 因子を分配関数の関係式 (49) の両辺から抜き出す. これは丁度, どちらの分配関数の中の模型もエネルギーの基準点を $\phi_{ij} = 0$ に設定するという積極的に物理的な意味がある. また同時に $u_\phi = x_\phi/x_0$ 及び $u_k^* = x_k^*/x_0^*$ を**相対局所 Boltzmann 因子**として導入する. その結果, 分配関数の関係式 (49) から以下の関係が得られる.

$$x_0(K)^{N_B} Z[u_\phi(K)] = x_0^*(K)^{N_B} Z[u_k^*(K)]. \quad (51)$$

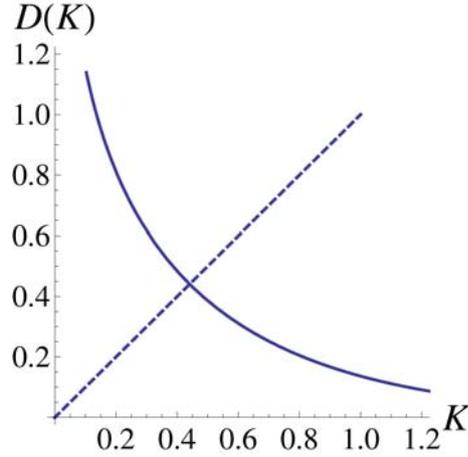


図 9: 逆温度の変換関数 $D(K)$ の様子. 破線は $D(K) = K$ を表す. 交点は逆温度の変換の固定点を表す.

ここで小文字で書き表した z を規格化された分配関数と呼ぼう. この規格化された分配関数を相対局所 Boltzmann 因子の関数として見ると,

$$z[u_\phi(K)] = z(u_1(K) = e^{-2K}) \quad (52)$$

$$z[u_k^*(K)] = z(u_1^*(K) = \tanh K) \quad (53)$$

と書ける. ここで双対変換の第二段階である. もしも $e^{-2D(K)} = \tanh K$ なる新しい結合定数 $D(K)$ を導入すれば, 式 (51) の右辺の分配関数を異なる温度を持つ Ising 模型として対応させる事ができる. 即ち

$$z[u_k^*(K)] = z[u_\phi(D(K))] \quad (54)$$

とするのである. 対応する逆温度 $D(K)$ は, 図 9 にあげるような元の逆温度 K の単調減少関数である. また逆温度を $K \rightarrow 0$ とすると双対な逆温度は $D(K) \rightarrow \infty$ となり, 逆に $K \rightarrow \infty$ とすると $D(K) \rightarrow 0$ となる事も示される. よって温度の関係式 $e^{-2D(K)} = \tanh K$ が高温の分配関数と低温の分配関数を関係付ける温度の変換式となっている事がわかる. また双対性の名前のおり, この関数は 2 回適用すると恒等変換になることがわかる. この双対変換の固定点を見ると $e^{-2K_c} = \sqrt{2} - 1 = 0.414214\dots$, つまり相転移温度は $T_c = 2.26919$ であり, 正方格子上的強磁性 Ising 模型の厳密解と確かに一致する [28, 29].

Potts 模型 Potts 模型の場合の局所 Boltzmann 因子は式 (42) で与えられている. 双対局所 Boltzmann 因子は Ising 模型の時と同様に離散的な Fourier 変換で与えられて,

$$x_{k_{ij}}^*(K) = \frac{1}{\sqrt{q}} \{e^K - 1 + q\delta(k_{ij})\} \quad (55)$$

となる. 同様に主要 Boltzmann 因子を抜き出す事によって分配関数を規格化して, (51) 式のような関係式を得る. この場合引数が, Ising 模型の時とは違い複数ある. しかし Potts 模型の特殊な性質, スピン変数の差に関わらず同じエネルギーである事より, 以下のように規格化された分配

関数は有効的に一変数関数である事がわかる.

$$z[u_\phi(K)] = z(u_1(K) = e^{-K}, \dots, u_{q-1}(K) = e^{-K}) \quad (56)$$

$$z[u_k^*(K)] = z\left(u_1^*(K) = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}, \dots, u_{q-1}^*(K) = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}\right). \quad (57)$$

ここで逆温度の変換を以下のように定義すれば, Ising 模型の時と同様に異なる温度の分配関数の関係を得る事ができる.

$$e^{-D(K)} = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}. \quad (58)$$

よって双対変換の固定点は一般の q 状態 Potts 模型に対して,

$$e^{K_c} = \sqrt{q} + 1 \quad (59)$$

と与えられる. これも Potts 模型の相転移点の厳密解と一致する. 特に Potts 模型は, Ising 模型とは異なり, $q > 4$ からは一次転移をする [26]. 双対変換はそのような相転移の性質に依らずに, 相転移点を厳密に導出する事が出来る一般的な枠組みなのだ.

3.3 双対変換の操作についての一般的考察

通常は双対変換の解説としてはここまでで良しとするのだが, 多少冗長であることを覚悟して双対変換を再び見直してみる. まず第一段階として離散的 Fourier 変換を行う. 分配関数に対して離散的 Fourier 変換を施した後, 主要 Boltzmann 因子を抜き出す. この操作は一般に交換可能であるので, 以下のような順番で書いても差し支えない.

$$\begin{aligned} Z[x_\phi(K)] &= x_0(K)^{N_B} z[u_\phi(K)] \\ &= x_0^*(K)^{N_B} z[u_k^*(K)]. \end{aligned} \quad (60)$$

次に第二段階として, この Fourier 変換された分配関数から逆温度の変換 $D(K)$ を見出す事により,

$$x_0^*(K)^{N_B} z[u_k^*(K)] = x_0^*(K)^{N_B} z[u_k(D(K))], \quad (61)$$

を得る. 規格化された分配関数 z ではなく元の形式で書くと,

$$Z[x_\phi(K)] = \left(\frac{x_0^*(K)}{x_0(D(K))}\right)^{N_B} Z[x_\phi(D(K))], \quad (62)$$

という関係式を得る. 残った係数部分がいわゆる Λ の事である. 例えば Ising 模型の場合, 具体的な表式は以下のように書き下す事ができる.

$$\Lambda = \left(\frac{x_0^*(K)}{x_0(D(K))}\right)^{N_B} = (\sinh 2K)^{\frac{N_B}{2}}. \quad (63)$$

この係数は通常, 重要視されないことが多い. しかし Λ が転移点上では厳密に 1 となることが (63) 式に相転移点の値を代入する事で分かる. また双対変換を利用した内部エネルギーの解析では Λ が内部エネルギーの値を導いてくれる. 詳しくは付録 B に譲る事にしよう.

実はこの Λ や分配関数の関係式 (62) が双対変換の一番重要な関係を示している. まず式 (62) を眺めると左辺と右辺の分配関数の値が一致する点, すなわち分配関数の固定点 $K_c = D(K_c)$ では, $\Lambda = 1$ が模型に依らずに一般的に成立する事がわかる. しかし 2 つの異なる温度の分配関数の関係 (62) が書けるためには, 温度の関係式が与えられる事, つまり規格化された分配関数の引数の間にうまい関係 $D(K)$ がある事が必要なのだ. この事は有限次元スピングラス模型を双対変換で解析するとき重要な理論的考察の基盤を与える事を注意しておく.

もう少し上記の操作で面白い特性を引き出して置こう. 実は模型については限定した表記ではないので上の操作は一般的な議論である. もしもある変換 $D(K)$ が存在して, $D^{(m)}(K) = K$ のような $m \geq 2$ 回の適用によって恒等変換になる場合を考える. (通常の変換は $m = 2$ である.) すると, 式 (62) からさらに同じ一連の操作を行う事が出来る. その結果は,

$$Z[x_\phi(K)] = \prod_{l=1}^m \left(\frac{x_0^*(D^{(l-1)}(K))}{x_0(D^l(K))} \right)^{N_B} Z[x_\phi(D^{(m)}(K))] \quad (64)$$

である. 仮定より左辺と右辺の分配関数の値が一致する事から,

$$\prod_{l=0}^{m-1} x_0^*(D^{(l)}(K)) = \prod_{l=0}^{m-1} x_0(D^{(l)}(K)) \quad (65)$$

と言える. 左辺も右辺も主要 Boltzmann 因子で表現されるため, 通常は特異性のあるような関数ではない. よってそこから定義される $D(K)$ も特異性のない解析的な関数である. 対偶命題を考えれば, $D(K)$ が特異性を持つような関数である場合は, 任意の $m \geq 2$ に対して $D^{(m)}(K) = K$ ではないこともわかる. ちなみに $D^{(m)}(K) = K$ が存在するという仮定の下では, 上式 (65) は温度の変換式 $D(K)$ の構成法を与えているともいえる. また固定点の条件 $D(K_c) = K_c$ を代入すると,

$$x_0(K_c) = x_0^*(K_c) \quad (66)$$

が双対変換の固定点の決定方程式となる事がわかる.

3.4 他の古典スピン模型の双対変換

双対変換そのものを文献等で調べてみると, おおよそ上記の Ising 模型と Potts 模型の場合に相転移点を得る事ができると言及したものがまず見当たらるだろう. 調べたものによっては Villain 模型という連続スピン模型のひとつ (XY 模型の近似的な模型) の場合に双対変換を行うと, 表面成長の模型である SOS 模型 (Solid on Solid) へと変換される事が紹介されているだろう. XY 模型に離散性を取り入れた Clock 模型 (Vector Potts 模型とも呼ばれる. 上記で扱った Potts 模型は Scalar Potts 模型) の有効模型としての離散的な Villain 模型も自己双対な模型の例として挙げられる.

他の古典スピン系に対する双対変換はいくらでも考える事は出来る. しかし離散的 Fourier 変換を局所的 Boltzmann 因子に行うと, 元の模型とは異なる場合がほとんどである. 何が起こるかという温度の変換式 $D(K)$ を見出す事ができないのである. 分配関数を規格化して, 相対 Boltzmann 因子による引数を考えれば分かってもらえるだろうが, Ising 模型から一度離れると引数の数が 2 つ以上となる. Potts 模型の場合は規格化された分配関数がそれでも一変数関数になった. これは Potts 模型の特殊性である. 他のスピン模型の場合, 引数が多いためにひとつの変数である温度の

変換だけで同じ模型に移す事がまず出来ない。例えば他の相互作用項などを付け足して有効的な模型で表現すると異なる模型になることが分かる。そのため相転移点を導く事は非常に難しくなる。それでも相転移点直上では同じ模型になるという場合もあるのでケースバイケースではある。また変換されたあとの模型を解析する事で元の模型の様子を探るという考え方も出来る。

幾何学的な関係から分かることであるが、双対変換は2次元格子模型で主に有効な理論である。3次元などの高次元の問題でも可能ではあるが、元の格子に戻る事が叶わないために相転移点を直接求めることは出来ない。但しここでも異なる格子上での分配関数間の対応関係を見出す事は出来る事だけは注記しておく。

よく質問される事であるが、スピンの挙動としてより自然な Heisenberg 模型については双対変換は確立していない。スピン 1/2 の Ising 模型ではなく、スピン 1 の Ising 模型の場合の双対変換も確立していない。他に2体相互作用とは限らず次近接相互作用を取り入れたり、多体相互作用を取り入れたスピン系も考えられる。しかしながらそれらの場合の多くは双対変換の応用は難しくなる⁴。そういった意味で双対変換自体の重要性に疑問を感じる読者もいるかもしれない。しかし歴史的に見ると果たしてきた重要性の大きさは否定できない。むしろ強磁性 Ising 模型に対する Onsager の厳密解 [29] 以前に相転移点を厳密に導出していた事 [28]、及びその厳密解の導出にも双対変換からの知見や解析法が利用されている事を考えると、統計力学における影響は非常に大きい。また行う計算の簡潔さに対して得られる結果の非自明さは魅力十分で、研究対象としても非常に刺激的である。確かに上記のような古典スピン系に固執する限りは、これ以上広がった応用はできないだろう。私自身、研究半ばでは双対変換自体に愛想を尽かした瞬間はある。しかし以下に述べていくように双対変換のさらなる応用を考える時の困難さに、筆者は直接向かいあったからこそ非自明な応用を着想出来たのだと思う。少ない時間でもいいから、すこしずつ双対変換に興味を持っていただけたら、悲観的な見方を和らげてもらえると筆者としては嬉しい限りである。

4 有限次元スピングラス模型の双対性による解析

さてこれまで紹介した道具立てを用いて、ついに有限次元スピングラス模型の解析に入ろう。双対性は、ランダムさが無い Ising 模型や Potts 模型に対しては厳密な臨界点を導出する非常に強力な手法であった。それをスピングラス模型に対して適用してみよう。

4.1 レプリカ法による双対変換の適用

ランダムな相互作用を取り扱う場合であっても、レプリカ法を適用することでそのランダムさを形式的に扱うことが出来る。複雑ではあっても有効的にランダムさのない模型に置き換えることが出来ることを先ほど見た事を思い出していただきたい。具体的には式 (24) で見た有効 $\pm J$ Ising 模型である。ここではそのレプリカ法を利用した後の有効模型に対して双対変換を考える事にしよう。まず双対変換が行いやすいように、式 (24) に与えられた有効 $\pm J$ Ising 模型の局所 Boltzmann 因子を以下のように書き換える。

$$x_{\phi_{ij}^{\alpha}}(K, K_p) = \frac{\cosh \left\{ K_p + K \sum_{\alpha=1}^n \cos \pi \phi_{ij}^{\alpha} \right\}}{\cosh K_p} \quad (67)$$

⁴完全に不可能ではなくて、ゲージ模型と呼ばれる面内で相互作用した高次元での模型や三角格子上で2体相互作用だけでなく3体相互作用を部分的に取り入れた模型は自己双対な模型である事が知られている [26, 30]。

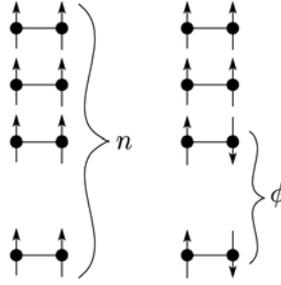


図 10: 相対 Boltzmann 因子の添え字の意味.

レプリカ法によって n 個のレプリカが出来ている事に注意すると, 双対局所 Boltzmann 因子は n 個のスピン変数 ϕ_{ij}^α ($\alpha = 1, \dots, n$) についての離散的な Fourier 変換として以下のように定義する.

$$x_{k_{ij}^\alpha}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \sum_{\{\phi_{ij}^\alpha\}} x_{\phi_{ij}^\alpha} \exp \left(i\pi \sum_{\alpha=1}^n k_{ij}^\alpha \phi_{ij}^\alpha \right). \quad (68)$$

この定義に基づいて, 双対局所 Boltzmann 因子を計算しておく,

$$x_{k_{ij}^\alpha}^*(K, K_p) = \sum_{\tau=\pm 1} \frac{e^{K_p \tau}}{2 \cosh K_p} \prod_{\alpha=1}^n \{e^{K\tau} + e^{-K\tau} \cos \pi k_{ij}^\alpha\} \quad (69)$$

を得る. 上記の局所 Boltzmann 因子を用いれば, スピングラス模型の場合も全く同様にして双対変換の第一段階, 離散的 Fourier 変換によって分配関数の別表現を見出せる.

$$Z_n[x] = 2^{nN_s - \frac{nN_B}{2} - n} Z_n[x^*]. \quad (70)$$

正方格子の場合は, $N_B = 2N_s$ という関係式と熱力学的極限を考える事により,

$$Z_n[x] = Z_n[x^*] \quad (71)$$

を得る.

双対変換の処方箋にのっとり, 局所 Boltzmann 因子の規格化 $u_\phi \equiv x_\phi/x_0$ 及び $u_k^* \equiv x_k^*/x_0^*$ を考える.

$$u_\phi(K, K_p) = \frac{\cosh \{K_p + (n-2k)K\}}{\cosh(K_p + nK)} \quad (72)$$

$$u_k^*(K, K_p) = \begin{cases} \tanh K_p \tanh^k K & k \in \text{odd} \\ \tanh^k K & k \in \text{even} \end{cases} \quad (73)$$

と与えられる. ここで添え字の ϕ 及び k は, ϕ もしくは k 個の反平行スピンのペアが n 個のレプリカコピーされたボンドの中にあるという意味で再定義する. (図 10 参照)

4.1.1 $n = 1, 2$ での双対変換

それではランダムさが無い場合と同様に双対変換の第二段階である温度の関係式 $D(K)$ を見つけてみよう. まずは主要 Boltzmann 因子を抜き出す事により分配関数の規格化を考える. 主要

Boltzmann 因子は,

$$x_0(K, K_p) = \frac{\cosh(K_p + nK)}{\cosh K_p} \quad (74)$$

$$x_0^*(K, K_p) = 2^{\frac{n}{2}} \cosh^n K \quad (75)$$

で与えられる。これらの主要 Boltzmann 因子を分配関数から抜き出すと、これは全てのボンドにおいてのエネルギーの基準を揃える意味があり、結果として以下の関係式を得る。

$$x_0^{NB}(K, K_p) z_n [u_\phi(K, K_p)] = x_0^{*NB}(K, K_p) z_n [u_k^*(K, K_p)]. \quad (76)$$

ここで z_n は規格化された分配関数を表す。

まずは練習問題として、レプリカ数 $n = 1$ の場合を考えてみよう。これは有効的にはランダムさのない Ising 模型に対応する。規格化された分配関数の引数の間の関係を見てみると、

$$z_1 [u_\phi(K, K_p)] = z_1 \left(u_1(K, K_p) = \frac{\cosh(K_p - K)}{\cosh(K_p + K)} \right) \quad (77)$$

$$z_1 [u_k^*(K, K_p)] = z_1 (u_1^*(K, K_p) = \tanh K_p \tanh K) \quad (78)$$

となっているので、 $u_1(K, K_p)$ と $u_1^*(K, K_p)$ を関係付ければよいことが想像できる。しかしながら元々温度と $\{\tau_{ij}\}$ の分布に関する確率 p による分配関数に対して、双対変換を行うということはどういうことか? という疑問が沸き起こるはずだ。色々な立場で見る事が出来る。ひとつはとにかく異なる温度について関係づけられるのだ、と考える立場。そしてもうひとつは温度、確率分布についてそれぞれ関係付けられるとする立場。もっと複雑な関係になるという考えもあり得る。そこでその煩雑さを解消するために、確率分布と温度を関係付けた西森線に限って、温度の変換 $D(K)$ の可能性についてまずは考えてみる。西森線の条件である $K_p = K$ を代入すると、それぞれの相対 Boltzmann 因子は、

$$u_1(K) = \frac{1}{\cosh 2K}, \quad u_1^*(K) = \tanh^2 K \quad (79)$$

となる。双対変換の第二段階である温度の関係式を見出してみよう。離散的 Fourier 変換を行った後の分配関数 $z[u_k^*(K)]$ を再び元の形式の分配関数 $z[u_\phi(K)]$ で書くことを考える。すると、

$$\frac{1}{\cosh 2D(K)} = \tanh^2 K \quad (80)$$

が適当である事が判る。相転移点はこの温度の変換 $D(K)$ についての固定点で与えられるので、 $D(K_c) = K_c$ を解くと、図 11 にある相図上で西森線における相転移点を得る事が出来る。

同様の手続きで、 $n = 2$ の場合の西森線上においても行う事が出来る。西森線の条件である $K_p = K$ を代入すると、相対 Boltzmann 因子の関係において $u_1 = u_2$ 、及び $u_1^* = u_2^*$ という対称性が生まれる。

$$u_1(K) = \frac{\cosh K}{\cosh 3K}, \quad u_1^*(K) = \tanh^2 K. \quad (81)$$

再び双対変換の第二段階である温度の変換を考える。

$$\frac{\cosh D(K)}{\cosh 3D(K)} = \tanh^2 K. \quad (82)$$

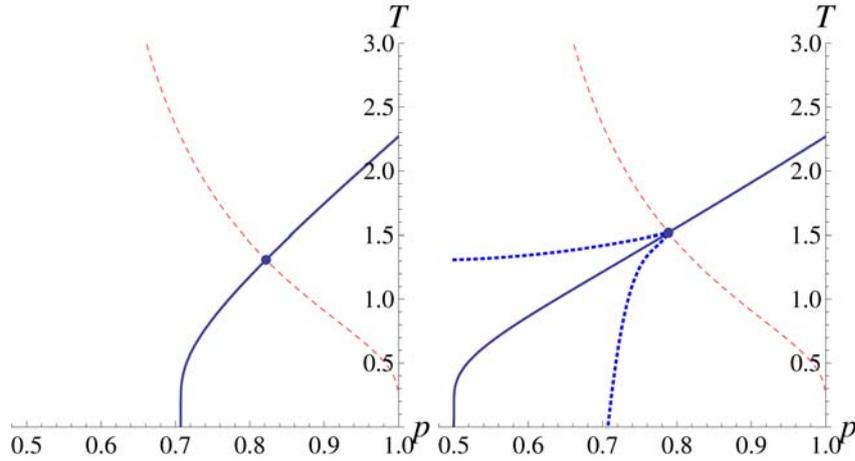


図 11: レプリカ数 1 及び 2 の場合に対する双対変換によって得られる相境界. 破線が西森線を表す. 西森線上の点が多重臨界点を表している. 詳しくは後述するが, 西森線の条件をはずして相境界全体を描く事もできる. 左図で太い曲線はレプリカ数 $n = 1$ に対する有効 $\pm J$ Ising 模型の相境界であり, 右の図の太い曲線は $n = 2$ の場合を表す. 但し $n = 2$ の場合は西森線から上の部分だけで厳密解と一致しており, 下の部分では一致しない. 点線が西森線以下での正しい相境界であり, 単純な相構造をしていない.

やはりこの場合においても相転移点は温度の変換の固定点で与えられて, $D(K_c) = K_c$ を解くと図 11 にあるような相図上で西森線における相転移点を得る事が出来る.

レプリカ法を使用してランダムさがあるような問題に対しても, ひとまず西森線に限れば双対変換を利用することが出来る事がわかった. 西森線における相転移点であるから多重臨界点である. 一般の自然数 n についても双対変換が有効であれば, 解析接続を行うことで $n \rightarrow 0$ のクエンチ型のランダム系でも多重臨界点を導けるという期待が出来る.

4.1.2 相対 Boltzmann 因子による表現

さてそうした一般化を考えると, レプリカ数の増大に伴い扱う相対 Boltzmann 因子の数が増えてしまうので, 混乱を招いてしまう. まず相対 Boltzmann 因子間の関係を双対変換の観点から見るために, いい表示法を考えよう. またその表示法によって, 西森線だとなぜ双対変換が可能であるのかということを見てみよう.

そのためにレプリカ数 2 の場合の西森線には限らない場合を考えてみる. その時, ある温度, 確率分布での分配関数の値は, 相対 Boltzmann 因子によってきまる 2 つのパラメータで表現する事が出来る.

$$u_1(K_p, K) = \frac{\cosh K_p}{\cosh(K_p + 2K)}, \quad u_2(K_p, K) = \frac{\cosh(K_p - 2K)}{\cosh(K_p + 2K)}. \quad (83)$$

つまりこれは 2 次元空間上の座標 (u_1, u_2) に与えられた電位などのようなスカラー場 (分配関数の値がそれに相当する.) が存在するような状況として見直すことが出来る. そしてそれは双対変換の第一段階である離散的 Fourier 変換によって別の座標点 (u_1^*, u_2^*) においても関係した値を取るところが存在する.

$$u_1^*(K_p, K) = \tanh K_p \tanh K, \quad u_2^*(K_p, K) = \tanh^2 K. \quad (84)$$

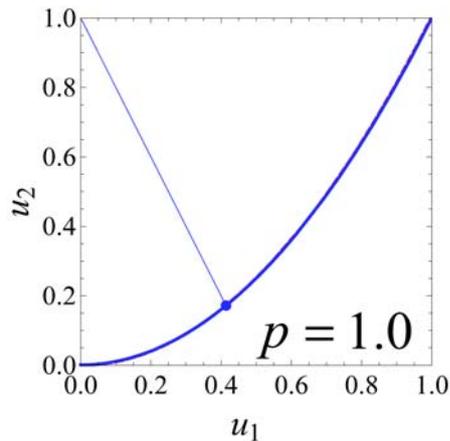


図 12: レプリカ数 2 の場合の有効 J Ising 模型のランダムさが無い場合の相対 Boltzmann 因子の振る舞い. 双対変換前と後で完全に一致する. (図 13 と比較するとよい.) 直線は固定点の集合を表す.

温度や確率分布の様子を変化させていくと、上記で定められた 2 次元空間上の曲線を描き、各点に対応する分配関数が存在する. 双対変換の固定点が存在するという事は、これら 2 つの曲線間に交点が存在するという事である. 実際にいくつかの場合について相対 Boltzmann 因子の描く曲線を図示してみよう. まずランダムさのない場合、つまり $K_p = 0$ という条件の下では図 12 のように、一致した曲線を描く. 但し、温度の変化に対して曲線上の移動を両者で比較したとき、逆向きになっているのが特徴的である. さて双対変換の第二段階として、離散的 Fourier 変換を行った後の分配関数 $z[u_k^*(K)]$ を再び元の形式の分配関数 $z[u_\phi(K)]$ で書くことをこの図の観点で考える. 温度の変換 $D(K)$ というのは、一致した曲線上での媒介変数間の変換と見る事が出来る. しかしながらランダムさが少しでも入ると 2 つの曲線は一致せず、異なる振る舞いをする様子が見て取れる. (図 13) 但し交点が存在しており、双対変換の固定点の存在が伺える. さまざまな p の値に対してその固定点に対応する温度を相図上に描き入れると図 11 のような相境界を得る事が出来る. しかしながら双対変換が相転移点を厳密に導出するための条件、ただ一度だけの相転移の存在の仮定に注意しよう. 3 相以上が存在するような西森線以下の相境界はうまく導けてはいない [24]. 固定点の一部では相境界を正しく与える事は分かった. しかしランダムさの影響を受ける場合、温度の変換 $D(K)$ は単独には定義しづらい事が図 13 を眺めると伺える. 温度だけではなく、確率分布に関する変換も同時に考慮した形式が必要となるという事である.

先ほどは上記のような煩雑さを解消するために、確率分布と温度を関係付けた西森線上に限って、温度の変換 $D(K)$ の可能性について考えた. 西森線の条件である $K_p = K$ を代入すると、相対 Boltzmann 因子の関係において $u_1 = u_2$, 及び $u_1^* = u_2^*$ という対称性が生まれて式 (81) のようになることがわかった. 振り返ってみると相対 Boltzmann 因子が表す曲線が実質的に一変数関数となり、図示してみると図 14 のように離散的 Fourier 変換前と後で描かれる曲線が一致する事がわかる. この条件の下であれば、温度の変換 $D(K)$ を定義する事は式 (82) のように容易である. つまり西森線上に限れば、ランダムさがある場合でも離散的 Fourier 変換は同一曲線上の異なる点を対応付けるに過ぎず、温度の変換式を構成する事が出来る. これがランダムさがある場合についても双対変換が成功した理由であることが分かる.

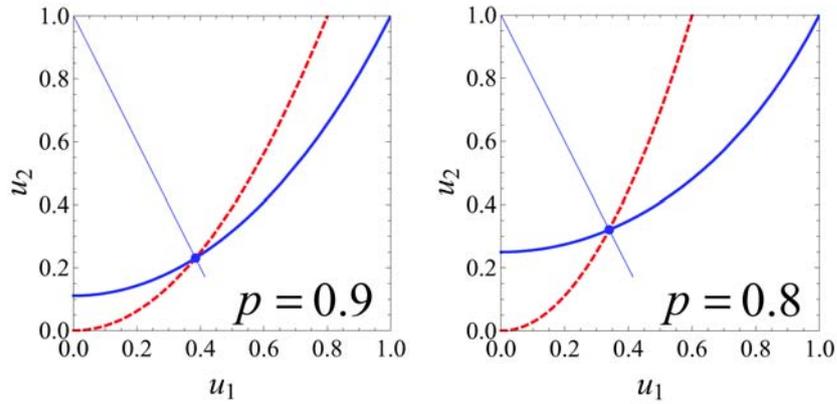


図 13: レプリカ数 2 の場合の有効 $\pm J$ Ising 模型における相対 Boltzmann 因子の振る舞い ($p = 0.9$ と $p = 0.8$)。実線で表されたのが双対変換前の相対 Boltzmann 因子であり、破線が双対変換後のものを表す。交点として示した点が双対変換の固定点である。直線で表したのが任意の p に対する固定点を連続的に描いたものである。

4.1.3 $n \geq 3$ の場合

それでは西森線上に限って、もう少しレプリカ法と双対変換について考察を進めてみよう。レプリカ数 $n = 3$ の場合に、西森線の条件である $K_p = K$ を代入すると相対 Boltzmann 因子において $u_1 = u_3$ 、及び $u_1^* = u_2^*$ という対称性が生まれる。具体的には以下のように与えられる。

$$u_1(K) = \frac{\cosh 2K}{\cosh 4K}, \quad u_2(K) = \frac{1}{\cosh 4K}, \quad u_3(K) = \frac{\cosh 2K}{\cosh 4K} \quad (85)$$

$$u_1^*(K) = \tanh^2 K, \quad u_2^*(K_p, K) = \tanh^2 K, \quad u_3^*(K) = \tanh^4 K. \quad (86)$$

残念な事に 3 次元上に描かれるこれらの曲線には交点がない。しかも異なる対称性を有していることから全く別の部分空間を走る曲線を描いている事が分かる。実際に図示してみると、図 15 のようになる。これでは西森線上であっても同じ曲線上を走る訳ではないので、媒介変数間の変換である温度の変換 $D(K)$ を行うことは出来ない。つまり双対変換の第二段階を実行することが出来ないのである。それではスピングラス模型に対する双対変換は破綻したのであるだろうか？

次の節で紹介するような考えによって、ある仮定の下では、この 2 つの曲線が重ならない問題を解消できる可能性があることが分かる [31]。実際にその仮定に基づいて西森線上の臨界点である多重臨界点を求めた一連の考察について紹介しよう。

4.2 多重臨界点と双対変換

スピングラス模型における双対変換について、文献 [31] に沿って考えてみる。上記で述べたように西森線ではレプリカ数 $n = 2$ の場合、ランダムさが存在しても温度の変換である $D(K)$ を構成する事が出来た。分配関数がある座標上に与えられたスカラー場として考えた時に、相対 Boltzmann 因子が温度の変化に対応しての座標空間上の移動を表現する。双対変換の第一段階である離散的

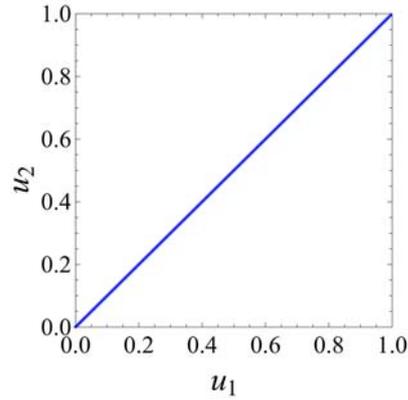


図 14: 西森線上のレプリカ数 2 における $\pm J$ Ising 模型の相対 Boltzmann 因子の振る舞い. ランダムさが
ない場合と同様に双対変換前のもとの後のものでは完全に一致する.

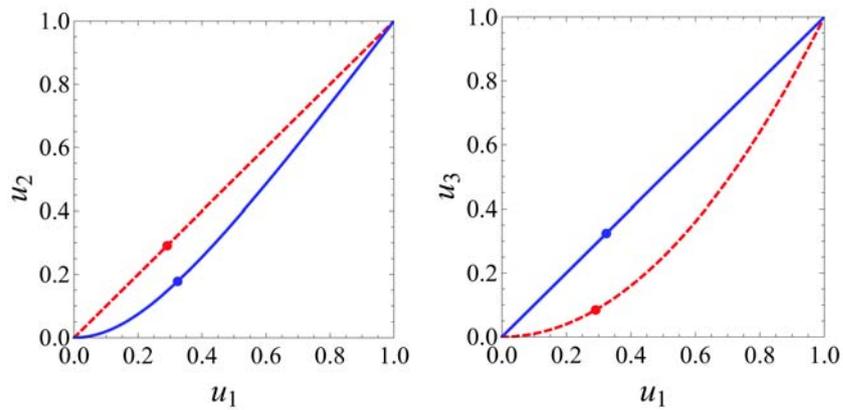


図 15: 西森線上におけるレプリカ数 3 に対する有効 $\pm J$ Ising 模型の相対 Boltzmann 因子の振る舞い. 実
線が双対変換前のもをを表し, 破線が双対変換後のものを表す. 後に現れる式 $x_0(K_c) = x_0^*(K_c)$ の解を点
で表したが, 双対変換の固定点ではない.

Fourier 変換は 2 つの一般に異なる曲線に対応させる. それらの 2 つの曲線が変換前と後で一致する
ような特殊な場合に, 温度の変換が存在する事がスピングラスにおける双対変換の成功の理由
である. しかしながら一般のレプリカ数へと拡張すると, どうもそのようにうまくはいかない. そ
こで離散的 Fourier 変換で対応が付く 2 つの曲線が一致しないような状況について考察を加えて
いく.

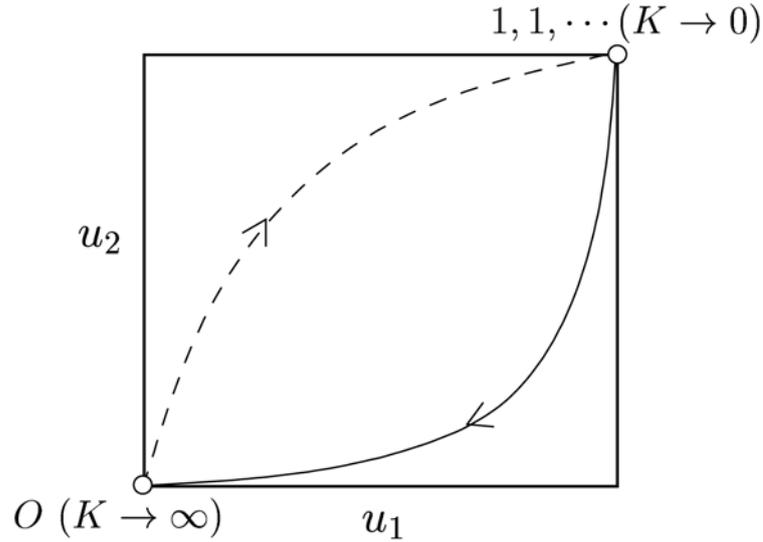


図 16: 相対 Boltzmann 因子による曲線と、双対変換との関係. 実線が $u_\phi(K)$ の変化を表し, 破線が $u_k^*(K)$ の変化を表す.

4.2.1 温度の変換の可能性

まず相対 Boltzmann 因子についてももう少し考えてみよう. 西森線上に限ると一般のレプリカ数 n に対して,

$$u_\phi(K) = \frac{\cosh\{(n - 2\phi + 1)K\}}{\cosh\{(n + 1)K\}} \quad (87)$$

$$u_k^*(K) = \begin{cases} \tanh^{k+1} K & k \in \text{odd} \\ \tanh^k K & k \in \text{even} \end{cases} \quad (88)$$

となる. ここで西森線の条件により, $u_\phi(K) = u_{n-2\phi}(K)$ 及び $u_k^*(K) = u_{k+1}^*(K)$ ($k \in \text{even}$) なる対称性が現れる. 温度に対してどのように振舞うかを見てみると, 逆温度 K が $0 \rightarrow \infty$ と変化するとそれぞれ $u_\phi(K)$ は $1 \rightarrow 0$, 一方 $u_k^*(K)$ は $0 \rightarrow 1$ へと変化する. 丁度, 逆の変化を見せる事が判る. ここに注目すると, 相対 Boltzmann 因子はそれぞれ異なる曲線を描くが, 従来の双対変換と同様に曲線上の移動の方向は互いに逆方向となっている事が分かる. それを抽象的に描いたのが図 16 である. また一方で, 規格化された分配関数は相対 Boltzmann 因子の和で書かれていることから, それらの値の増加に対しては単調増加関数である. 規格化された分配関数の上限と下限は簡単に評価する事が出来る. まず逆温度 K が ∞ (低温極限) の時であるが, 全てのスピンの揃っている状態が支配的となる. レプリカ法によって n 乗されている事とスピンの全反転対称性によって $z_n[0, \dots] = 2^n$ となる事がわかる. 一方高温極限 $K \rightarrow 0$ については, レプリカ法によって n 個のコピーが N 個のスピンの存在する事と全て等しい重みで足し合わせる事から $z_n[1, \dots] = 2^{nN}$ である事がわかる. 規格化された分配関数の値はこれらの上限, 下限の間の値を必ず取る.

問題となっている事柄を再び思い起こすと, 双対変換の第二段階である温度の変換である. 温度の変換はどのように行うかという離散的 Fourier 変換を行った後の分配関数 $z[u_k^*(K)]$ を再び元の形式の分配関数 $z[u_\phi(K)]$ と結びつけばよい. 上記で指摘した規格化された分配関数の単調性と

上限下限の存在から、必ず $z[u_k^*(K)]$ と等しい値を持つ $z[u_\phi(D'(K))]$ は存在する。相対 Boltzmann 因子 u_ϕ と u_k^* による曲線は重ならなくても、等しい値を持つ分配関数を表す 2 点は任意の温度に対して存在する。2 つの曲線が離れていても、規格化された分配関数が等しいところで対応させる、という新しい形式の温度の変換を $D'(K)$ と表記する。従来の双対変換における $D(K)$ と異なるのは、離散的 Fourier 変換で結び付けられる 2 つの曲線が重ならない点である。つまり従来の温度の変換と同じ性質を有するのかどうかを考える必要がある。しかしながらいずれにせよ、双対変換に必要な第二段階である温度の変換が以下のように達成できる。

$$z_n [u_k^*(K)] = z_n [u_\phi(D'(K))] . \quad (89)$$

よってレプリカ法を適用した後に、西森線上に限って双対変換の第一段階及び第二段階を経ると、

$$Z_n[x_\phi(K)] = \left(\frac{x_0^*(K)}{x_0(D'(K))} \right)^{N_B} Z_n[x_\phi(D'(K))] \quad (90)$$

を得る事が出来る。左辺の分配関数及び対数を取った自由エネルギーにおいて温度を変化させた時に相転移点を迎えば、右辺でも同様に特異的な振る舞いをするはずである。もしも温度の変換 $D'(K)$ に特異性がなければ、それぞれの分配関数の特異性が対応することになる。少なくとも西森線上に限れば相転移は強磁性 - 常磁性転移のみであると考えられる。よって $D'(K)$ の固定点が西森線上の相転移点、即ち多重臨界点を与える。残念ながら $D'(K)$ の具体的な形は分からないが、通常の変換 $D(K)$ と同様に、 $D^{(2)}(K) = K$ を満たすならば式 (65) により $D'(K)$ を構成する事が出来る。別に $D'(K)$ の具体形は分からずとも、固定点の値のみを求めるという目的であれば、従来の双対変換と同様に $D'(K_c) = K_c$ において $x_0(K_c) = x_0^*(K_c)$ を得る。これは $D'(K)$ に特異性がないという仮定の下では厳密に多重臨界点の位置を予言する重要な式となる。またこれは極めて一般的に転移点を与える式となっている。Fourier 変換により関係付けられる 2 つの曲線が重ならずとも、温度の変換が行える。そうするとランダムさのパラメータ K_p を温度の関数 $K_p(K)$ として書く事によって、西森線に限らずに実行出来る。相互作用 $\{\tau_{ij}\}$ の分布関数にも依存する理由はない。上記の理由から $D'(K)$ の解析性の仮定の下、ランダムスピン系の相境界を描く道具立てが完成する。

4.2.2 温度の変換 D' の固定点

それではまずは多重臨界点の位置を、 $D'(K)$ に特異性がないという仮定の下で、実際に計算を試みる。そして既存の結果と対比して、その正当性を評価してみよう。状況証拠にしか過ぎないが、何もしないよりはましである。出発点は、 $x_0(K_c) = x_0^*(K_c)$ である。両辺ともに定義式 (74) と (75) を代入して、

$$\frac{\cosh\{(n+1)K\}}{\cosh K} = 2^{\frac{n}{2}} \cosh^n K \quad (91)$$

を得る。これを解く事によって一般の n についての多重臨界点の位置を予言する事が出来る。元より通常の変換の枠組みで $n = 1$ と 2 の場合については多重臨界点を計算する事が出来て、厳密解と一致していた。上の式によって計算されるものも当然ながら同じ解を与える。

それでは一番の目標であるクエンチ型のスピングラス模型の多重臨界点を考えるために $n \rightarrow 0$ 極限を考える。温度の代わりに p で表示すると非常に見通しの良い式を与える事ができる。

$$-p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p) = \frac{1}{2}. \quad (92)$$

格子及び模型	双対変換	数値計算等の結果
正方格子 $\pm J$	$p_c = 0.889972$ [32, 33]	0.8905(5) [35]
		0.8906(2) [36, 37]
		0.8907(2) [38]
		0.8900(5) [39]
		0.8894(9) [40]
		0.89081(7) [41]
		0.89083(3) [42]
		0.89061(6) [43]
正方格子 Gaussian	$J_0 = 1.021770$ [32, 33]	1.02098(4) [37]
三角格子 $\pm J$	$p_c = 0.835806$ [34]	1.0193(3) [43]
		0.8355(5) [39]
六角格子 $\pm J$	$p_c = 0.932704$ [34]	0.83583(6) [43]
		0.9325(5) [39]
正方格子 Potts($q = 3$)	$p_c = 0.079731$ [32, 33]	0.93297(5) [43]
		0.079-0.080 [44]

表 1: 双対変換による結果と数値計算等のほかの大規模な計算手法で与えられた結果との比較.

左辺は 2 値を取る確率変数に対するエントロピー $H(p)$ の格好をしている. さてこの方程式の解を求めると, $p_c = 0.889972 \dots$ である [32, 33]. 表 1 にまとめるように, 他の手法によって得られた結果との対比を試みる. 双対変換以外によるものは多少ばらついている感があり, おおまかにいって, $p_c = 0.8900$ 派と $p_c = 0.8908$ 派に分かれているように見える. 他の格子や他の模型についての結果も同様に導く事が出来るが, 本解説記事では省略する.

さて問題は, 仮定としている $D'(K)$ の解析性である. しかしこれは分配関数を結びつける変換であるために分配関数が計算できなければどうしようもない. そのため今のところ取り扱っているような正方格子などの場合, その検証は非常に困難である. そこで分配関数を直接的に扱えるような格子が必要となってくる. また多重臨界点の位置について厳密に評価が出来る舞台があれば, その結果と比較して仮定が正しいかどうかを判定することもできよう. この要請に応じてくれるのが, 次に紹介する階層格子である.

4.3 正当性の検証: 階層格子

ここで紹介する階層格子は, 実空間繰り込み群と呼ばれる計算手法が厳密な計算となる舞台である. 実空間繰り込み群は, 元は正方格子など分配関数を評価する事が難しい問題に対する近似的な手法として有効である. 実際には分配関数よりも, 繰り込み群という名前から連想できるように, パラメータの変化の様子を見て臨界現象や相転移点を探る. スケール変換と呼ばれる操作により, 系の粗視化を行い系を支配している相を判定する事を考える. その際粗視化によって塗りつぶされる自由度の影響を取り入れる操作 (**繰り込み**) を行う. その繰り込みに対応した操作における計算を厳密化させるように構成したのが階層格子である.

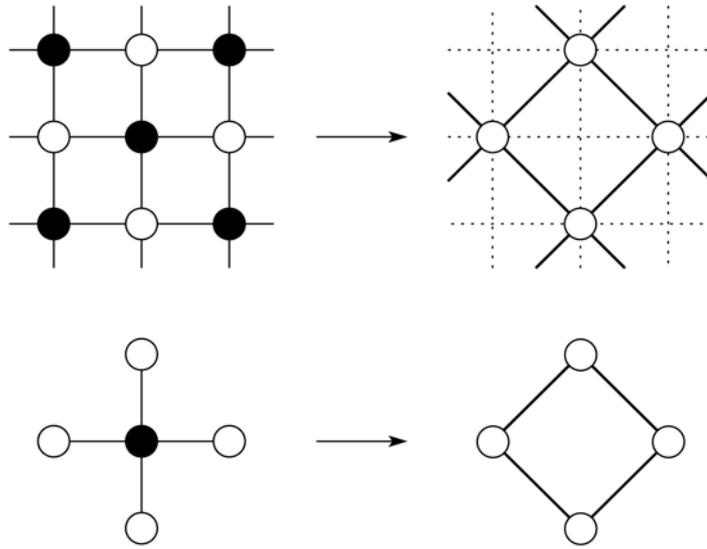


図 17: 正方格子における素朴な実空間繰り込み群. 黒丸の部分のスピンの自由度に関して和を取る.

4.3.1 階層格子の構成

繰り込みの操作を素朴に行う事が出来るのが実空間繰り込み群である. 実空間繰り込み群は, ある決められたルールに従ってスピン変数の和を部分的に取ることで実行できる. その際に複雑に絡み合う相互作用を近似する事によって繰り返し実行できるように工夫する. 例えば正方格子の場合は, 十字架上に4つのスピンの囲まれた1つのスピンについての和を取る事によって実行する. (図 17 参照) ここで和を取った後に4体相互作用があわられるが, これを近似して無視すると繰り返し同じように十字架上にのった4つのスピンの囲まれた1つのスピンについて和を取る事が再び出来る. これを繰り返す. しかしながら近似の取り方によって, まるで実情とは異なる結果を得る. 例えばこの場合は, 有限温度における相転移が存在しないという結果を生み出す. 近似が荒すぎたのだ. では4体相互作用を取り入れて計算するとどうだろう. 少しはましになって, 有限温度の相転移点が見れる.

さて階層格子では上記で行うような近似操作を必要としないように工夫をしておく. 階層格子の構成は, 図 18 のように1つのボンドからはじめる. その1つのボンドにユニットと呼ばれるいくつかのスピンの持った構造を入れ子式にはめ込んでいく. これを繰り返す事によって非常に大きな格子構造を構成することで階層格子は完成である.

では実空間繰り込み群はどうやるかという, このユニットの入れ子式構造である事に注目する. ユニット内にある端点を除くスピン変数について和を取る事を考える. この操作によって生み出される多体相互作用はなく, また同じように2体相互作用をする系へと変換する. しかも入れ子式の構造のおかげで, 全く同じ構造になっている. つまりスピンの和を取る操作を繰り返す事が容易に出来る. このユニット内のスピンの和を取る操作の前後で2体相互作用の強さの変化がどのように移り変わるかを考えるのが, 階層格子の解析の基本となる. そしてその変化を調べる事により図 19 のように相互作用の強さの変化 (これを繰り込みの流れと呼ぶ) により相図を明らかにする事が出来る. 繰り込みの流れが $K \rightarrow \infty$ に流れている事実は, 繰り込みの固定点 K_c から少しでも低温側であれば, 繰り込みとスケール変換の操作によって低温相が見えてくる事を表

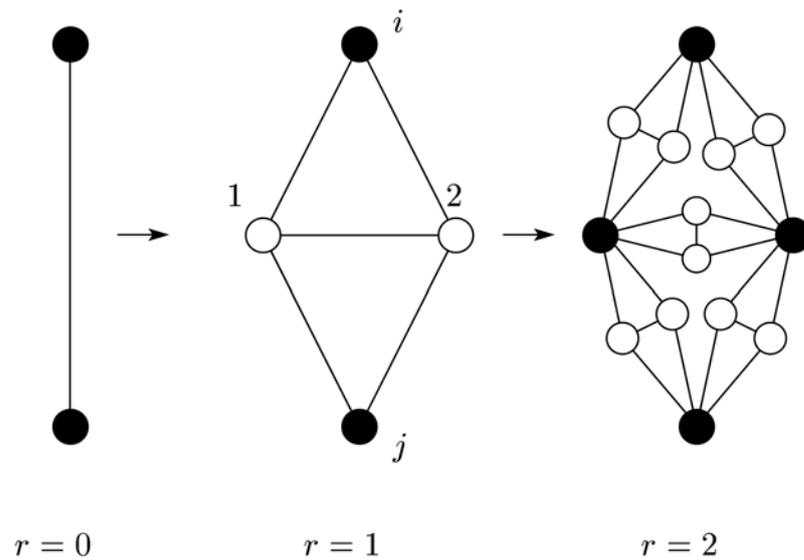


図 18: 自己双対な階層格子.

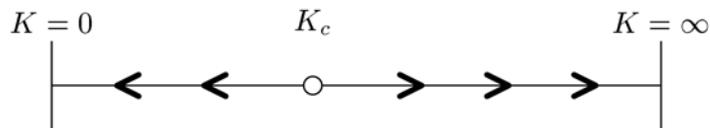


図 19: 図 18 にあるような階層格子上的繰り込みの流れ.

している．逆も然りである．階層格子の場合は，繰り込みの操作に一切の近似がないために相図の厳密解を得る事が出来る．

面白い事に階層格子の中にも正方格子と同様に，自己双対格子が存在する．実は図 18 に描かれている階層格子は，自己双対格子である．そのため双対変換を適用する事も出来て，今の目的である双対変換の結果の正当性を調べるにも格好の舞台となる．

4.3.2 繰り込みの実際

単純な事例として Ising 模型の繰り込みを考えてみよう．系の温度 T に応じて階層格子上に相互作用 $K = 1/T$ を割り振る．これが繰り込みの流れの初期条件 $K^{(0)} = K$ を与える事に相当する．階層格子の入れ子式の構造に注目すると，繰り込みの操作はどの段階においても同じである．そこで一般的に r 回目の繰り込みを行う事を考えよう．繰り込み前の相互作用 $K^{(r-1)}$ として相互作用の大きさはどのように変化するかを考えればよい．ユニット内でスピンの和を取り，その結果

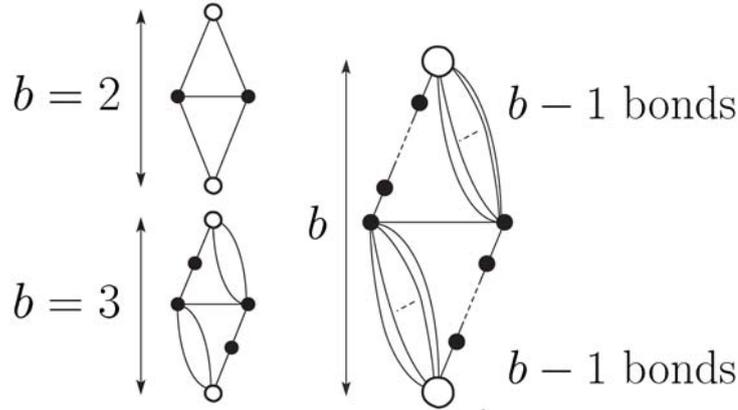


図 20: スケール因子 b によって特徴付けられる自己双対階層格子の例.

を端のスピン変数の有効相互作用と置き換えるように定式化をすると以下のようなになる.

$$A^{(r)}(K^{(r-1)})e^{K^{(r)}S_iS_j} = \sum_{\{S_k\}} e^{K^{(r-1)}(S_iS_1+S_iS_2+S_1S_2+S_1S_j+S_2S_j)}. \quad (93)$$

ここで A はスピンの配位に依存しない定数である. 下付き添え字はそれぞれ図 18 に描かれているスピンを表す. 繰り込みによる相互作用の変化を考えるだけであれば係数 A は必要がなく, 両端のスピンが揃っている場合と反転している場合の結果の比をとることによって, 繰り込み群方程式を得る事が出来る.

$$e^{-2K^{(r)}} = \frac{4 \cosh K^{(r-1)}}{e^{5K^{(r-1)}} + 2e^{-K^{(r-1)}} + e^{-3K^{(r-1)}}}. \quad (94)$$

この漸化式をさまざまな初期条件の下, 解く事によって図 19 のような相互作用の大きさの変化の様子を得る事ができる. 安定固定点として $K = 0$ 及び ∞ を得る一方で, 不安定な固定点として $K_c = 0.440687\dots$ を得る. これは正方格子などの自己双対格子上の Ising 模型の相転移点 $e^{-2K_c} = \sqrt{2} - 1$ と一致する.

階層格子の自己双対格子はいくらでも構成する事は出来て, 例えば図 20 にあげる階層格子は任意の因子 b について自己双対である. 自己双対格子であるから双対変換によって, 正方格子と同じ転移点を有する事が予想できる. 実際に上記と同様の繰り込みで計算すると確かに相転移点は正方格子のものと同じである事がわかる.

4.3.3 ランダムスピン系の繰り込み群

それではこの階層格子において多重臨界点を考えてみよう. 双対変換による予言は, 上で説明した正方格子の例と変わらない. 自己双対格子であれば全く同じ計算となる. つまり $\pm J$ Ising 模型の多重臨界点の位置は $p_c = 0.889972\dots$ である.

それでは繰り込みの観点で計算を考えてみよう. 本解説記事の本筋からはそれるので詳細は省くが, 大まかな流れを以下に説明しよう. ランダムさを持つ場合, 例えば $\{\tau_{ij}\}$ が確率分布に従う場合, 繰り込みの初期条件が様々に異なる事を意味する. 数値計算で扱うしかないのだが, 大きな階層格子を用意して確率分布に従って初期条件としての相互作用を各ボンドに割り振る. その

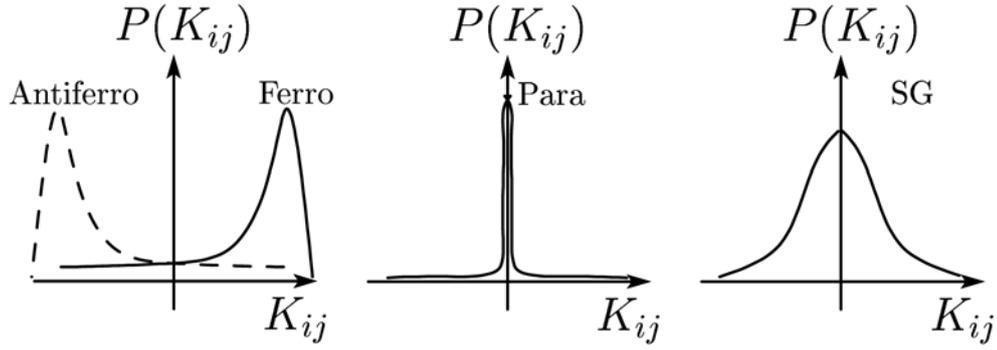


図 21: 繰り込まれた相互作用の分布関数の様子.

後, ユニットを構成する部分を取り出して繰り込みの計算を行う. 例えば $b = 2$ の自己双対階層格子の場合は, 以下の繰り込み群方程式を解く.

$$A^{(r)}(\{K^{(r-1)}\})e^{K_{ij}^{(r)}S_iS_j} = \sum_{\{S_k\}} e^{K_{i1}^{(r-1)}S_iS_1 + K_{i2}^{(r-1)}S_iS_2 + K_{12}^{(r-1)}S_1S_2 + K_{1j}^{(r-1)}S_1S_j + K_{2j}^{(r-1)}S_2S_j}. \quad (95)$$

するとユニット内の様々な相互作用を持つボンドの影響が繰り込まれて新たな有効相互作用を得る. ここまでの仕組みは, ランダムさが無い場合と全く同じである. しかしながらランダムさの存在によって繰り込まれた後の相互作用もまた様々な値を取り, 確率分布 $P_r(K_{ij})$ が存在することが分かる. そのため以下のような確率分布の変化を追う必要がある.

$$P_r(K_{ij}) = \int \left\{ \prod_{\text{unit}} dK_{ij}^{(r-1)} P_{r-1}(K_{ij}^{(r-1)}) \right\} \delta(K_{ij} - K_{ij}^{(r)}). \quad (96)$$

この確率分布関数の変化を調べる事によって, 階層格子上のランダムスピン系の解析を行う. 相図を描くために, 確率分布関数がどのようになればよいのかということにも簡単に触れておく. 繰り込みを十分な回数行う事によっていくつかの状況が考えられる. スピングラス模型を取り扱う場合には, 強磁性相 (K_{ij} が正でどれも非常に大きい), 反強磁性相 (K_{ij} が負であるが大きさは非常に大きい), 常磁性相 (K_{ij} の影響が非常に小さいので分布は 0 付近となる.), そしてスピングラス相 (K_{ij} が正と負の両者現れて競合が起こる.) が考えられる. そのため分布関数の格好は図 21 のように与えられるであろう. これを調べるには確率分布関数を直接測定するか, モーメントを計算して間接的に調べるかのどちらかの手法が考えられる. 数値計算上で実装して, 調べるとすると, 大きく分けて以下の 2 つの手法が考えられる. ひとつは相互作用の強さをあらかず $\{K_{ij}\}$ のヒストグラムを構成して, そのヒストグラムの変化を実際に観測することである [45]. もっと素朴にヒストグラムは構成せずに, サンプリング的に扱うことも考えられる [46]. ある程度大きな数のボンドを用意して適当なサンプリングを行い繰り込みを何度か行う. 何度もサンプリングと繰り込みを行い, 繰り込まれた相互作用を同じ数だけ生成することで近似的に上記の計算を行う事が出来る. サンプリングを行う事による誤差は生じるが, その問題点に対しては, 十分に大きなサンプリング数を用意すればよいだろう. ある程度大きな系でサンプリング数を変化させることで有限サイズの効果をも十分に検証する事で誤差を抑える事が出来る. 筆者らは, このサンプリングの方法によって多重臨界点の位置をそれぞれの階層格子について小数点 4 桁までの精度で求めた [47]. (表 2) 比較検討をしやすいようにエントロピー関数 $H(p)$ の値も表には掲載している.

	p_c	$2H(p_c)$
$b = 2 \pm J$	0.8915(6)	0.991(4)
$b = 3$	0.8903(2)	0.998(1)
$b = 4$	0.8892(6)	1.005(4)
$b = 5$	0.8895(6)	1.003(4)
$b = 6$	0.8890(6)	1.006(4)
$b = 7$	0.8891(6)	1.005(4)
$b = 8$	0.8889(6)	1.006(4)

表 2: 自己双対階層格子における多重臨界点の位置. ここで $2H(p_c)$ は双対変換による予言では 1 になるとされている.

双対変換の予言によると, $2H(p_c) = 1$ となるはずである. しかしながら階層格子上の多重臨界点では実際にはそうはならない.

階層格子上の計算は, 実空間繰り込み群に対して厳密である. ランダムさがある場合はサンプリングによる誤差の範囲で厳密である. 双対変換では自己双対格子であれば同じ相転移点を与える. 一方で繰り込みの計算では, 多重臨界点の位置は階層格子の形状に依存する事を示している. これは興味深い特徴である. 序論で述べたようにスピングラス模型などでは, 強磁性相互作用と反強磁性相互作用の競合によるフラストレーションという量が重要であると指摘した. このフラストレーションは, 格子の形状によって発現の仕方が変わってくる幾何学的な量である. 西森線上では自由エネルギーがフラストレーションの分布関数によって書き下せる事を考えると, 双対変換の結果のように多重臨界点の位置が格子の形状に依存しないというのはおかしい. 温度の変換式 $D'(K)$ が解析的であるという仮定の下での, 双対変換による予言は間違っているという可能性が大きい.

4.4 正当性の検証: いくつかのレプリカ数に対する多重臨界点

階層格子上のスピングラス模型における双対変換の正当性の議論は文献 [47] において主に議論している. その議論に沿ってもう少し考えてみよう. 先ほどはクエンチ型のスピングラス模型, つまり $n \rightarrow 0$ を取った場合を考えた. では極限を取らないで, いくつかのレプリカ数における多重臨界点と双対変換による予言の対比を見てみよう. 物理的な興味は薄れるが, 正当性の検証には重要である. まず自然数のレプリカ数について考える. レプリカ法の手法通り, 配位平均を先にとることでランダムさの効果を取り入れる事が出来る. そこで得られる有効模型はもはやランダムさがなくて, 誤差なしで階層格子上の繰り込みを実行できる. 異なるレプリカ間の相互作用などが生み出されるが, そこまで取り込んだやや複雑な繰り込みを考える. 具体的には以下のようにより Boltzmann 因子で表示した繰り込みを考えるとよい.

$$A^{(r)}(\{u_{ij}^{(r-1)}\})u_{\phi_{ij}}^{(r)} = \sum_{\{\phi\}} u_{\phi_{i1}}^{(r-1)} u_{\phi_{i2}}^{(r-1)} u_{\phi_{12}}^{(r-1)} u_{\phi_{1j}}^{(r-1)} u_{\phi_{2j}}^{(r-1)}. \quad (97)$$

ここで ϕ_{ij} の添え字はユニット内におけるボンドの場所を表し, 値は n 個のレプリカ内でのスピン配位について情報を与えている. 具体的には反平行スピンの数である. この繰り込みは双対変換の第一段階で結びついた $u_{\phi}(K)$ と $u_k^*(K)$ の 2 つの曲線についての新しい知見を与えてくれる. 実際に繰り込みの流れを相対 Boltzmann 因子による空間上で見てみよう. (図 15) 青い点線が初

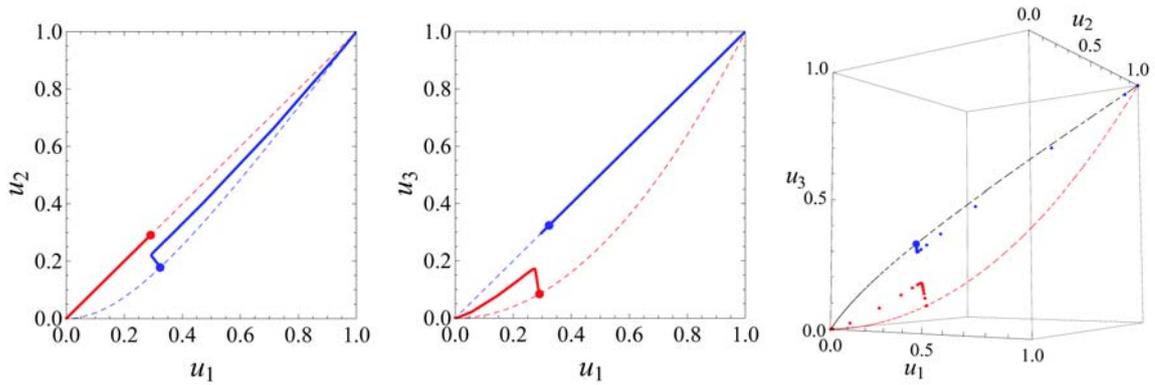


図 22: レプリカ数 3 に対する有効 $\pm J$ Ising 模型の繰り込みの流れ. 右の図は点により各繰り込み計算における相対 Boltzmann 因子の値をプロットしたもの. 左側と真ん中の図は実線により繰り込みの流れを表した. 破線は繰り込みをしていない裸の相対 Boltzmann 因子のプロット (図 15 参照)

期条件を与える $u_\phi(K)$ を表す曲線である. 一方赤い点線が離散 Fourier 変換で関係付けられている $u_k^*(K)$ による曲線である. 繰り込みの流れは初期条件であるこの 2 つの曲線から出る. 青い曲線が $u_\phi^{(r)}(K)$ の変化を繋いで追いかけた繰り込みの流れであり, 最終的には安定固定点の 1 つである $(u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 1)$ に流れる. 一方赤い曲線は $u_k^{*(r)}(K)$ による繰り込みの流れである. 青い曲線とは逆方向の安定固定点 $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ へと流れる. 丁度それぞれ高温極限 $(u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 1)$, 及び低温極限 $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ に対応している. つまり Fourier 変換によって結び付けられた 2 つの曲線で表される模型は, それぞれ高温の元々の模型から低温の別の模型へと変換されているのだ. これを見ると双対変換の第一段階は, うまくその役割をに果たしている事がわかる. また一旦両者の繰り込みの流れは近づいてから離れるようにしてそれぞれの安定固定点へと流れている事も観測される.

さてこれらの流れを観測する事で, 高温相から低温相へと流れが切り替わる境界, 即ち相転移点を決定する事が出来る. 表 3 に様々な自己双対階層格子において, いくつかのレプリカ数に対して相転移点を求めた結果を載せる. また双対変換による予言についても並べて載せておく. クエンチ型のスピングラス極限である $n \rightarrow 0$ 以外に対しても, 同じ論法で一般のレプリカ数 n に対する多重臨界点は式 (91) から得る事が出来る. これを見ると, 温度の変換 $D(K)$ が素直に出来ない場合は, 厳密解と双対変換の予言は異なっている事がわかる. ここからも新しく導入した温度の変換 $D'(K)$ について疑問符がつく. $D'(K)$ に特異性がもしもなければ, 通常の変換と同様に $x_0(K) = x_0^*(K)$ が転移点を決定するところまで考えてきた. しかし実際の結果と対比してみると, どうもそううまくはいかないことが決定的となった. 筆者はこの点に注目して, スピングラス模型に対する双対変換の議論を改良する事を考えた. 失敗は成功の母というが, 実際にそのとおりである. ここで述べた相対 Boltzmann 因子の繰り込みが改良についての中心的なアイデアを与えてくれる.

次の節で, 多重臨界点の位置を非常に精度よく予言する理論を紹介するが, ここではさらに温度の変換 $D'(K)$ について調べてみよう.

b	n	p_c	$p_{\text{ren.}}$	$p_c - p_{\text{ren.}}$
2	$n \rightarrow 0$	0.889972	0.8915(6)	-0.0015(6)
	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769563	0.768851	0.000713
	4	0.757348	0.755451	0.001897
3	$n \rightarrow 0$	0.889972	0.8903(2)	-0.0003(2)
	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769563	0.769022	0.000542
	4	0.757348	0.755942	0.001406
4	$n \rightarrow 0$	0.889972	0.8892(6)	0.0007(6)
	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769563	0.769649	-0.000086
	4	0.757348	0.757763	-0.000415
5	$n \rightarrow 0$	0.889972	0.8895(6)	0.0004(6)
	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769563	0.7705020	-0.000939
	4	0.757348	0.7601328	-0.002785
6	$n \rightarrow 0$	0.889972	0.8890(6)	0.0010(6)
	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769563	0.771376	-0.001813
	4	0.757348	0.762313	-0.004965

表 3: 双対変換による多重臨界点の位置 p_c と繰り込み群による厳密な解析による $p_{\text{ren.}}$ の比較. スケール因子 b やレプリカ数 n をさまざまに変化させて考えた有効 $\pm J$ Ising 模型で検証している. クエンチ極限 $n \rightarrow 0$ の結果は, $p_{\text{ren.}}$ として繰り込みをサンプリングの方法で行う手法で求めたものである.

4.5 正当性の検証：温度の変換式 $D'(K)$

歴史的には前後してしまうが、温度の変換式 $D'(K)$ について、ごく最近分かってきたことを以下では述べる [48]. 階層格子上の繰り込みの計算が厳密な計算である、という特徴を先の解析では利用してきた. ここではもうひとつの特徴である、分配関数を厳密に計算できる事を利用して温度の変換 $D'(K)$ を実際に見てみよう. 温度の変換 $D'(K)$ は式 (89) に定義されている通り、 u_k^* の表示による分配関数と同じ値を取る u_ϕ 表示による分配関数を結びつけばよい. よってそれぞれの表示について任意の温度での分配関数を評価すればよい. ここではレプリカ法によって配位平均を既にとった模型、特に $n = 3$ の場合について考えることにする.

階層格子における分配関数の計算の手続きを簡単に説明しておこう. 非常に大きな階層格子上の分配関数を考える. 具体的には s 回入れ子式にユニットを代入した階層格子を考える. つまりボンドの総本数は、ユニット内のボンドの本数を u_B とすると、 u_B^s である. その分配関数は相対 Boltzmann 因子 $\{u_\phi^{(0)}\}$ によって表示されているとする. つまり $z[u_\phi^{(0)}]$ である. すると繰り込みの式 (97) によって、

$$z[u_\phi^{(0)}] = \left(A^{(1)}(K^{(0)}) \right)^{u_B^{s-1}} z^{(1)}[u_\phi^{(1)}] \quad (98)$$

と変換される. ここで u_B^{s-1} は 1 回繰り込みを行ったために減ったボンドの本数を表す. 各ユニットに係数 $A^{(1)}$ が残るので上記の式が成り立つ. これを繰り返すと、

$$z[u_\phi^{(0)}] = \prod_{r=1}^{s-1} \left(A^{(r)}(K^{(r-1)}) \right)^{u_B^{s-r}} z^{(s)}[u_\phi^{(s)}] \quad (99)$$

を得る. これを用いれば、ボンド当たりの自由エネルギーを計算して適切に微分を行う事によって内部エネルギーやエントロピーなどの熱力学量を得る事が出来る.

$$-\beta f = \frac{1}{u_B^s} \log z[u_\phi^{(0)}] = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{u_B^r} \log A^{(r)}(K^{(r-1)}) + \frac{1}{u_B^s} \log z^{(s)}[u_\phi^{(s)}]. \quad (100)$$

最右辺における第二項は熱力学極限では無視できるので、繰り込み毎にでてくる係数 $A^{(r)}(K^{(r-1)})$ を評価してやれば自由エネルギーもしくは分配関数を評価する事が出来る. しかも近似は一切行っていないので厳密解を得る事が出来る. この計算方法は、 u_k^* 表示についても同様に行う事が出来る. この分配関数の厳密な計算を用いて数値的に評価して、分配関数が等しい値を持つ点同士を結びつけることで $D'(K)$ を実際に構成する. 図 23 にあるのが $D'(K)$ である. 単調減少関数であり見かけ上全く特異性がないように見える. しかしながら微分していくと見つかる特異性もあるので、解析的であると断定する事は危ない. 数値的に扱う他はないので、 $D'(K)$ の特異性を調べる事は、非常に難しい問題であると思われる.

何も収穫がないように思われるかもしれないが、実際に調べてみた事があるというのは重要で、非常に面白い性質を見出す事が出来る. 通常の変換においては温度の変換は $D^{(2)}(K) = K$ を満たしている. 即ち $D^{-1}(K) = D(K)$ である. しかしながらスピングラス模型において構成した通常とは異なる温度の変換 $D'(K)$ では、図 23 のように $D'(K) \neq D'^{-1}(K)$ である. 通常の変換とは大きく異なる事がわかる. 単純な高温相と低温相の対応をさせているわけではない事が以下の事実でわかる. 固定点以外の点でこの温度の変換を繰り返し利用すると、

$$Z[x_\phi(K)] = \prod_{l=1}^m \left(\frac{x_0^*(D'^{(l-1)}(K))}{x_0(D'^{(l)}(K))} \right)^{N_B} Z[x_\phi(D'^{(m)}(K))] \quad (101)$$

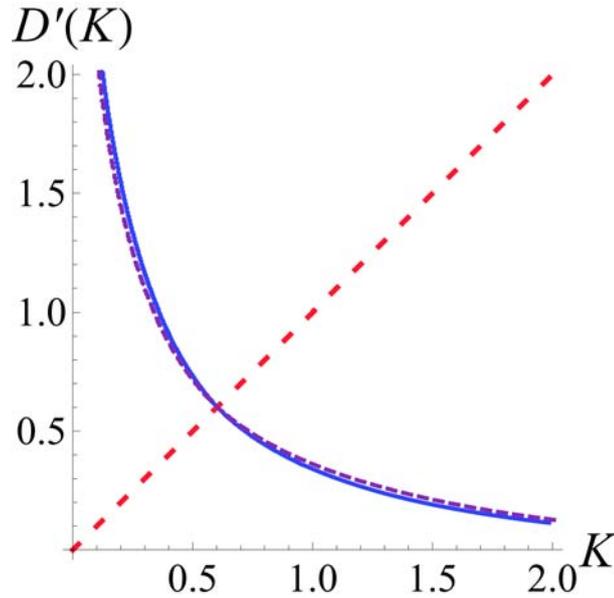


図 23: $D'(K)$ (実線による曲線) とその逆関数 $D'^{-1}(K)$ (破線による曲線) の振る舞い. 点線による直線は $D'(K) = K$ を表す.

なる関係を見出す事が出来る. 様々な温度 $D^{(l)}(K) (l = 1, \dots, m)$ の分配関数同士が対応してしまう. このスピングラス模型に対する双対変換の異常な性質を考察する事が必要である. とりあえずこの問題に関しては, 以降の節で紹介する手法で改善する事に成功している. しかしながら, 上記の性質が双対変換のナイーブな応用をどのように破綻させているのかということは, はっきりとは分かっていない. この点に関しては, 今後の進展を待ちたい.

4.6 正当性の検証: 他の相転移点, 他の模型

多重臨界点に絞って解析及びその解説を続けてきたが, 多重臨界点以外の相転移点はどうか. スピングラス模型の双対変換には, これまでに挙げてきたように様々な形で際どい問題があることが判った. しかしながら双対変換の固定点を出す方程式は非常に単純である. この点に注目すると, 固定点が相転移点であるという仮定の下では多重臨界点に限らず, 他の領域での相転移点を求める事が出来る [32, 33, 49, 50]. 西森線の条件を課さずに, $\pm J$ Ising 模型に対して一般の p 即ち K_p について固定点の方程式を考える.

$$x_0(K, K_p) = x_0^*(K, K_p). \quad (102)$$

同様に $n \rightarrow 0$ 極限を取り, クエンチ型のスピングラス模型の相転移点に対する仮説とすると, 以下の方程式を得る.

$$p \log(1 + e^{-2K}) + (1 - p) \log(1 + e^{2K}) = \frac{1}{2} \log 2. \quad (103)$$

この方程式で $\pm J$ Ising 模型の相境界を一般に描くことが出来る. 結果は図 24 にあるとおりである. しかしながらこの相境界は特に低温側では, これまでに知られている結果とはまるで違うところを走る. 基底状態でも強磁性相が残ると考えられているため, この結果は受け入れがたいの

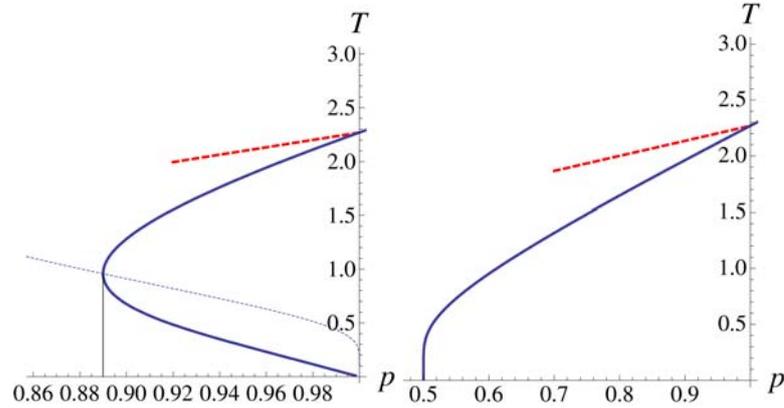


図 24: $\pm J$ Ising 模型 (左図) とボンド希釈型の Ising 模型 (右図) に対する双対変換が予想する相図. 実線が双対変換による相図. 破線が摂動論による解析によって得られたランダムさが少ない領域での相境界を外挿したもの. $\pm J$ Ising 模型に対して西森線を点線で表した. 垂直な直線は数値計算等の結果により期待されている垂直な (もしくははわからずにリエントラントしている) 相境界を比較のために表している.

だ. ランダムさがなくなる極限で有限の相転移温度 T_c を与えるが, これはもちろんランダムさのない Ising 模型の転移点を与える. それではその近辺での相境界の様子はどうだろうか. ランダムさを摂動展開で取り扱うように, ランダムさが少ない極限を考えて上の方程式を展開するのである. ランダムさのない Ising 模型の相転移点は $1 + \exp(-2K_c) = \sqrt{2}$ で与えられる. 上記の方程式に $p = 1 - \Delta p$ ($\Delta p \ll 1$) として Δp と $\Delta K = K - K_c$ として ΔK の展開を考えると,

$$\frac{\Delta K}{\Delta p} = K_c(1 + e^{2K_c}) \quad (104)$$

を得る. これより以下の結果を得る.

$$\frac{1}{T_c} \left. \frac{dT}{dp} \right|_{T=T_c} = (1 + e^{2K_c}) = 3.41413. \quad (105)$$

一方, このランダムさの非常に少ない極限における傾きについて, E. Domany の摂動論による結果があるので比較してみよう [51]. 彼の摂動論による結果は,

$$\frac{1}{T_c} \left. \frac{dT}{dp} \right|_{T=T_c} = 3.20911 \quad (106)$$

である. ここからも双対変換の固定点は正しい相転移点を導出できない事が分かる. もちろん, スピングラス模型の双対変換を考えたのは K_p と K を関係付ける事によって, 温度の変換 $D'(K)$ を考えた上である. しかしながらランダムさが非常に少ないこの領域であっても相図上で曲線 $K_p(K)$ を考える事によって同じ事は出来る. ゲージ対称性などはないものの, 双対変換の同様の議論は行える. そこでも温度の変換関数が異なる形ではあれ, 定義する事は出来る. もしもその関数に特異性がなければ, やはり固定点が相転移点を与えるはずで, 上の 2 つの結果の不一致は深刻な問題である.

歴史的にみえてみると, ランダムさのある模型に対する双対変換の議論は長い歴史がある. 西森線の存在が知られていない頃から考えられてきたものである. 相互作用の分布関数をこれまで考

えてきたスピングラス模型のものではなく、ボンド希釈型の場合に対する双対変換がまず考えられた [50]. 分布関数は以下のように定義される.

$$P(\tau_{ij}) = p\delta(\tau_{ij} - 1) + (1 - p)\delta(\tau_{ij}). \quad (107)$$

この場合と同じ議論を用いる事によって双対変換の固定点からやはり相境界を描く事が出来て,

$$p \log(1 + e^{-2K}) + (1 - p) \log 2 = \frac{1}{2} \log 2 \quad (108)$$

を得る. この相境界は図 24 に描かれているものである. この場合は基底状態の相転移点など抑えるべきところは一致しており [52], 結果は厳密解を与えるように思われた. しかしながら先ほどから指摘してきたようなスピングラス模型に対する双対変換にあらわれる問題点と同様なものが指摘されてきた [53]. そして再び, ランダムさが非常に少ない極限における相境界の様子を調べてみると, 摂動論の結果とやはり一致しない事が分かる. 双対変換の固定点による相境界の傾きは, 以下で与えられる [50].

$$\left. \frac{1}{T_c} \frac{dT}{dp} \right|_{T=T_c} = 1.34254. \quad (109)$$

一方, 摂動論の結果は [54],

$$\left. \frac{1}{T_c} \frac{dT}{dp} \right|_{T=T_c} = 1.32926 \quad (110)$$

である. 他の Potts スピンにおけるボンド希釈型の問題などでもこの問題が生じている [55, 56].

様々な角度からスピングラス模型及び他のランダムさのある模型に対するナイーブな双対変換について議論してきた. しかしながら多重臨界点についてはそれほどひどくない値を出してはいるものの, 相境界全般についてはその予言する値は良いものとはいえない. そしてやはり欲求としてほしいものは厳密解である. そうではなくても厳密解への手がかりを見つけない. 以下の節では, この数年で発展したスピングラス模型の双対変換の理論の紹介をしよう. そこではまさに厳密解への挑戦の成果が述べられている. 厳密解への手がかり, そしていくつかの問題については実際に厳密解を得ている事をご覧に入れよう.

5 繰り込み群と双対変換

スピングラス模型に従来の双対変換をナイーブに適用した場合に起こる問題を再び眺めてみよう. 双対変換は二段階からなる. 第一段階は局所 Boltzmann 因子の離散的 Fourier 変換である. これはレプリカ法を用いれば, スピングラス模型であっても通用する. 第二段階の温度の変換を行う際に, 第一段階で関係付けられた相対 Boltzmann 因子の 2 つの曲線が重ならない事が通常の変換とは異なる問題点である. この問題点を解消するために, 繰り込み群を導入するというアイデアが登場した [47]. そのアイデアの主要な部分について以下では解説していこう.

5.1 繰り込みの流れ

階層格子の繰り込みによる解析の際, この 2 つの曲線から始まる繰り込みの流れを観測した. その時に 2 つの繰り込みの流れは, 互いに一度近づく振る舞いを見せた後に高温極限及び低温極限へ

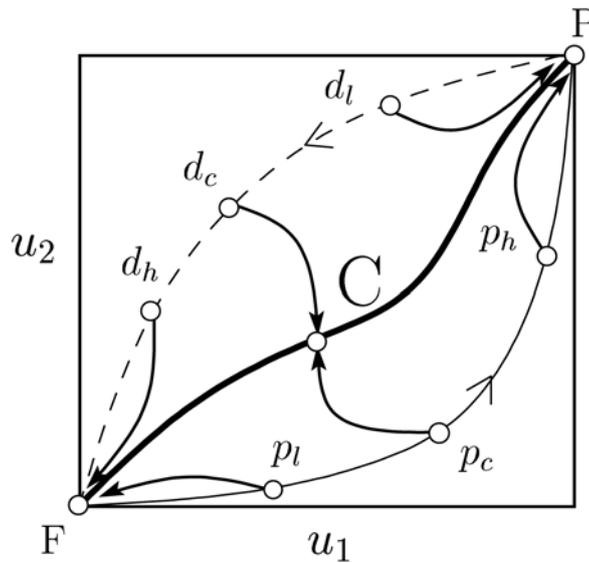


図 25: レプリカ数 n に対する有効 $\pm J$ Ising 模型における繰り込みの流れと双対変換の関係の模式図.

とそれぞれ流れた. 互いに逆方向への流れを見せたのは双対変換の第一段階で Fourier 変換を行ったためであると考えられる. 即ち同じ分配関数を表現するのに Fourier 変換で結び付けられる 2 つの表現が存在したためである. では臨界点ではどうか? 高温と低温の区別がないのだから繰り込みの流れを考えると共通の不安定固定点が存在するはずだ. よって繰り込みの流れと, Fourier 変換で結び付けられる相対 Boltzmann 因子の 2 つの曲線は, 一般的には図 25 のような関係を持つことが考えられる. 一般的には相対 Boltzmann 因子の空間は n 次元の超立体空間であるが, 便利のため 2 次元平面で表示している. 元々の相対 Boltzmann 因子による曲線 $\{u_\phi(K)\}$ が実線, Fourier 変換で結び付けられる曲線 $\{u_k^*(K)\}$ が破線で描かれている. 矢印の方向は, 温度を変えていった時の変化の様子を表す. 繰り込み変換を考えると, 2 つの曲線から繰り込みの流れが発生する. 階層格子では繰り込みを行うたびに新しい形式の相互作用が発生しないため, 繰り込みの流れも同じ相対 Boltzmann 因子の超立体空間で考える事が出来る. 比較的高温点 p_h から始まる繰り込みの流れは高温極限 P 点へと到達する. それに対応するものは d_h 点であり, 逆に低温極限 F 点へと繰り込みの流れは行く. 逆に比較的低温の場合は p_l から繰り込みの流れが発生して低温極限 F 点へと行くのに対応して, もう一方は d_l から高温極限 P 点へと流れる. このように繰り込みの流れは, 双対変換の第一段階を反映した動きをする. さて相転移点付近から始まる繰り込みの流れはどうかというと, この流れの格好から分かるのは共通の不安定固定点を目指す. その不安定固定点は, 十分に繰り込んだ後に見出せる位置にある. 即ち元々の分配関数を表す裸のパラメータにより表される 2 つの曲線からは異なるところにある. 繰り込んだ後の有効模型を考えると相対 Boltzmann 因子が変化する (これを $\{u_\phi^{(r)}(K)\}$ 及び $\{u_k^{*(r)}(K)\}$ と表記する) から, 元の曲線とは異なる曲線で以って同じ分配関数を表すことになる. 共通の不安定固定点 C を目指して, 相転移点付近 p_c そして d_c から始まる繰り込みの流れは向かう. このことから十分に繰り込んだ場合の相対 Boltzmann 因子による曲線は, $\{u_\phi^{(r)}(K)\}$, $\{u_k^{*(r)}(K)\}$ 共に近づいて共通の曲線を描くと考えられる. 丁度, 図 25 の太い曲線がそれにあたる. この曲線上では, ランダムさのない Ising 模型などと同様に通常の双対変換の第二段階と同じ操作が行える. 即ち, 曲線の媒介変数表示として

の温度の変換 $D(K)$ が行える. この場合 $D^{(2)}(K) = 1$ であるので, 特異性はない. よって双対変換の固定点が厳密に相転移点を与える. したがって多重臨界点を含め, 相境界は以下の決定方程式を以って厳密に決定する事ができる.

$$x_0^{(r \rightarrow \infty)}(K, K_p) = x_0^{*(r \rightarrow \infty)}(K, K_p). \quad (111)$$

ここで $x_0^{(r)}$ と $x_0^{*(r)}$ はそれぞれ r 回繰り込んだ後の分配関数から得られる主要 Boltzmann 因子である. これをもし評価する事が出来れば, 相転移点に関する厳密解を得られる. しかしながら無限回繰り込みを行う事は解析的には現時点では不可能であるし, 数値計算に頼る他ない. また無限回繰り込みが行えるのであれば, 双対変換を行う必要もない. そういった意味では上記の方程式は当然の事を言っているに過ぎない. しかしここで思い起こしておきたいのは, 繰り込みを行わない場合の結果がそれほどひどくない結果を与えていたことである. 少なくとも多重臨界点については, 良い一致をしていた. そこで繰り込みをある程度実行して, 改善を試みるという方針を採る. リーズナブルな計算量で, 非常に精度のよい相転移点に対する結果を得る手法として, 繰り込みと双対変換を組み合わせた解析法を提案する. せっかちな読者のために, 結果を先に述べておく. 一回の繰り込みで小数点 4 桁程度の精度で多重臨界点については正確な解を与える事が, 階層格子における厳密解と対比する事で分かる. また階層格子以外についても実空間での繰り込み計算を考える事により, 同様の解析が出来る. 精度のために近似を出来るだけ行わないようにするため, いわゆる実空間繰り込み群とは多少異なる計算を行う. その計算の際に, 繰り込みの回数に相当するものを大きくすると, 相転移点の値がある値に向かって収束する振る舞いを見せる. つまり厳密解へと系統的に近づける計算手法の可能性を示している.

それでは繰り込み計算と双対変換を併用した計算により, 正確な相転移点を導出してみよう.

5.2 階層格子：多重臨界点

まず繰り込み群と双対変換を併用するというアイデアを, レプリカ数 $n = 3$ の場合について適用してみよう. そもそも改善効果が見られるのか? ここが重要な押さえどころである. 1 回繰り込みを行った後の繰り込まれた相互作用を用いて, 多重臨界点をいくつかのレプリカ数の模型について求めてみよう. 形式的には,

$$x_0^{(1)}(K, K) = x_0^{*(1)}(K, K) \quad (112)$$

と書ける. 行う計算は, レプリカ法を適用した後に繰り込み計算をする事を考える. 階層格子上では繰り込みの計算はユニット内で行えばよい. 繰りこまれた後の主要 Boltzmann 因子を考えるのだから, その場合ユニットの両端のスピンは揃っているという条件がつく. よって例えば $b = 2$ の自己双対階層格子においては, 以下のような計算を行えばよい.

$$x_0^{(1)}(K, K_p) = \int \prod_{\text{unit}} P(K_{ij}) \left(\sum_{S_1, S_2} e^{K_{i1}S_1 + K_{i2}S_2 + K_{12}S_1S_2 + K_{1j}S_1 + K_{2j}S_2} \right)^n \quad (113)$$

$$x_0^{*(1)}(K, K_p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^5 \int \prod_{\text{unit}} P(K_{ij}) \left\{ \sum_{S_1, S_2} (e^{K_{12}} + S_1S_2e^{-K_{12}}) \times \prod_{k=1,2} (e^{K_{ik}} + S_k e^{-K_{ik}}) (e^{K_{kj}} + S_k e^{-K_{kj}}) \right\}^n. \quad (114)$$

b	n	$p_c^{(1)}$	$p_{\text{ren.}}$	$p_c^{(1)} - p_{\text{ren.}}$
2	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769048	0.768851	0.000197
	4	0.755986	0.755451	0.000535
3	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769138	0.769022	0.000116
	4	0.756250	0.755942	0.000308
4	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769629	0.769649	-0.000020
	4	0.757619	0.757763	-0.000144
5	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769968	0.770502	-0.000534
	4	0.758461	0.760133	-0.001672
6	1	0.821797	0.821797	0
	2	0.788675	0.788675	0
	3	0.769947	0.771376	-0.001429
	4	0.758300	0.762313	-0.004013

表 4: 1 段階の繰り込みと双対変換 $x_0^{(1)}(K) = x_0^{*(1)}(K)$ の固定点による結果.

この両者を用いて、西森線上での条件 $K = K_p$ の下、 $x_0^{(1)}(K) = x_0^{*(1)}(K)$ という方程式の解を求めるだけである。ユニット内にあるスピン変数についての和を取り、ユニット内にあるいくつかのボンドの配位平均を取る必要がある。そのため計算に必要なコストは u_S (ユニット内のスピン数) 及び u_B により、和を取る回数分の $2^{u_S+u_B}$ と評価できる。さてこのようにして計算された多重臨界点 ($K_p = K$ の相転移点) を表 4 に並べた。従来の双対変換をナイーブに適用した場合の結果である表 3 と見比べていただきたい。明らかに、1 回の繰り込みによって求められた結果が厳密な値に近づいていることが分かる。当然ではあるが、繰り込みをしたとしても $n = 1$ 及び $n = 2$ の場合の結果は変わらない。これは Fourier 変換によって関係付けられた 2 つの相対 Boltzmann 因子による曲線が不変であるためである。そのような場合、繰り込みをしても同じ曲線上に乗るだけであり、繰り込みをしたあとでも双対変換は再び同じ結果を与える。つまり、双対変換は $n = 1$ 及び $n = 2$ の場合に直接繰り込みの不安定固定点を求めていたことが分かる。

さて次は肝心のクエンチ極限である。我々の主題であったクエンチ型のスピングラス模型における多重臨界点を、繰り込みと双対変換を併用して求めてみよう。即ち式 (112) においてクエンチ極限 ($n \rightarrow 0$) を取ればよい。表 5 にあるのが、クエンチ極限を取って求めた多重臨界点の値である。これも小数点 4 桁の精度で繰り込みで厳密に求めた結果と一致している様子が見られる。従来の双対変換の固定点とは違い、格子の形状に依存した結果が導かれている事が特徴的である。繰り込みの効果が反映されている訳だが、物理的に自然な結果となったことが伺える。

b	p_c	$p_c^{(1)}$	$p_{\text{ren.}}$	$p_c^{(1)} - p_{\text{ren.}}$
2	0.889972	0.892025	0.8915(6)	-0.0005(6)
3	0.889972	0.890340	0.8903(2)	0.0000(2)
4	0.889972	0.889204	0.8892(6)	0.0000(6)
5	0.889972	0.889522	0.8895(6)	0.0000(6)
6	0.889972	0.889095	0.8890(6)	0.0000(6)

表 5: クエンチ極限 $n \rightarrow 0$ によって得られる自己双対格子の多重臨界点の位置.

5.3 正当性の検証: $D'(K) \rightarrow D(K)$

多重臨界点の結果を見るに限り、繰り込みと双対変換の併用は大成功に思われる。ではその正当性の検証をそこだけに求めてよいだろうか？ここでは温度の変換に注目して、繰り込み群がどのようなふるまいをしているかをもう少し視覚的に見た最近の進展について解説しよう [48].

実際に分配関数を計算することが出来る階層格子の利点を活かして、温度の変換 $D'(K)$ を再びみていく。十分に繰り込んだ後では、Fourier 変換によって関係付けられる相対 Boltzmann 因子による 2 つの曲線 $\{u_\phi^{(r)}(K)\}$ と $\{u_k^{*(r)}(K)\}$ は重なる。ここでは従来の双対変換と同様な温度の変換が可能である。この場合の温度の変換においては、通常の変換と同様に、 $D(K) = D^{-1}(K)$ が成立しているということである。ここではスピングラス模型における温度の変換 $D'(K)$ 及びその逆関数 $D'^{-1}(K)$ が繰り込みの回数に対してどのような振る舞いをするかを実際に見てみる。レプリカ数 $n = 3$ の西森線上で再び検証を試みる。繰り込みをした後の分配関数において温度の変換を行うことを考える。まず温度の関数としての分配関数から相対 Boltzmann 因子による表現に置き換えて、双対変換の第一変換を行う。

$$Z_n(K) = \left(x_0^{(0)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_\phi^{(0)}(K)] = \left(x_0^{*(0)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_k^{*(0)}(K)]. \quad (115)$$

ここから 2 つの表現において、繰り込みを行う。

$$\left(x_0^{(r)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_\phi^{(r)}(K)] = \left(x_0^{*(r)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_k^{*(r)}(K)]. \quad (116)$$

この右辺において、温度の変換 $D_r'(K)$ を行い、 $\{u_\phi^{(r)}(K)\}$ の表示による分配関数に置き換える。その結果、

$$\left(x_0^{(r)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_\phi^{(r)}(K)] = \left(x_0^{*(r)}(K)\right)^{N_B} z_n[u_\phi^{(r)}(D_r'(K))]. \quad (117)$$

ここで温度の変換 $D_r'(K)$ における添え字 r は、繰り込みの回数に依存した関数形をしているため付した。図 26 に自己双対格子 $b = 2$ の場合についてのいくつかの例を示した。これを見ると、繰り込みの回数を経るに従って、 $D_r'(K)$ は $D_r'^{-1}(K)$ と互いに一致するようにわずかずつではあるが変化していつていることが分かる [48]. 十分に繰り込めば、 $u_\phi^{(r)}(K)$ 及び $u_k^{*(r)}(K)$ の 2 つの曲線が重なり、温度の変換が従来の双対変換と同様に出来るという期待通りである。

さて双対変換の固定点を求めるために $x_0^{(r)}(K) = x_0^{*(r)}(K)$ を利用した。この解は $D_r'(K)$ の固定点を表す。しかしながら繰り込みの回数によって $D_r'(K)$ の形状が変化して、またわずかながらでもその固定点が変わることが分かった。厳密な解は $D_{r \rightarrow \infty}'(K)$ の固定点であることは間違いない。ゆえに $D_0'(K)$ の固定点は正しい相転移点を表さない事が分かる。それでは温度の変換関数

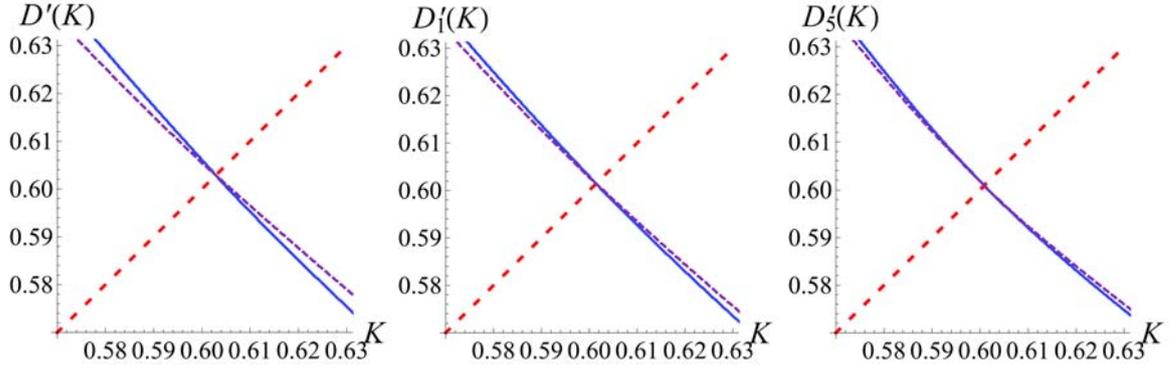


図 26: レプリカ数 3 に対する有効 $\pm J$ Ising 模型における温度の変換関数 $D'_r(K)$ とその逆関数 $D'_r^{-1}(K)$ の振る舞い. 左から繰り込みを行わない場合 ($D'(K)$), 1 回繰り込みを行った場合 ($D'_1(K)$), 5 回繰り込みを行った場合 ($D'_5(K)$).

$D'_r(K)$ に特異性があるのだろうか. 現段階では 2 階微分まで調べたところそれらしい振舞いは全く見られていない. おそらくは $D'_r(K) \neq D'_r^{-1}(K)$ のような特殊性から通常の双対変換と異なる影響を及ぼしているのであろうとしか, 現時点では言えない. この点については, まだこれからも考えていく必要がある.

しかしながら多重臨界点を求めるという目的は十分に既に達成している. その正当性の検証も十分に行ってきた. それでは次は階層格子での計算から飛び出して, 真に興味ある正方格子などの通常扱われるような格子におけるスピングラス模型の多重臨界点及び他の相転移点について考えてみよう.

5.4 正方格子：一般的な定式化

正方格子などの通常考えるような格子では, 実空間繰り込み群は厳密な処方箋とはならない. それは分配関数を評価する際に, スピンの和を部分的に取る時に多体相互作用が有効的に生じるためである. その多体相互作用の効果を取り入れて, 繰り返し和を取ることは困難を極める. しかしながら, 階層格子において試みた繰り込みと双対変換は 1 回の繰り込みで非常に良い精度を与えた. また階層格子においては, 部分的にスピンの和を取る範囲はユニット内で限られていた. そこで正方格子などの場合では, 通常言われるような繰り込み群による解析とは多少異なった姿勢で, 部分的にスピン和をある程度の範囲のみで取る事を考えることを筆者は提案した [57]. まずは素朴な和のとり方として, 図 27 にあげるようなものを考える. 階層格子と同様に双対変換の第一段階後を考える. そこで 2 つの表現において, 部分的にスピン和を取ることを考える.

$$\begin{aligned} Z_n(x_0, x_1, \dots, x_n) &= Z_n(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \\ &\rightarrow Z_n^{(s)}(x_0^{(s)}, x_1^{(s)}, \dots) = Z_n^{(s)}(x_0^{*(s)}, x_1^{*(s)}, \dots). \end{aligned} \quad (118)$$

ここで $Z_n^{(s)}$ はスピンの和を取った後の分配関数を表し, 添え字の s は和のとり方に関する添え字とする. 以下では相転移点の位置を精度良く求めるために, いくつかの和のとり方を考える. ここで $x_\phi^{(s)}$ と $x_k^{*(s)}$ は和を取った後に生じる 4 体相互作用も含むような局所 Boltzmann 因子である. そのため引数としては 4 つのスピン, しかもさらに n レプリカ用意したものの配位によって決まる. 非常に複雑な格好をしていることが伺える. 局所 Boltzmann 因子の引数は繰り込みを行った

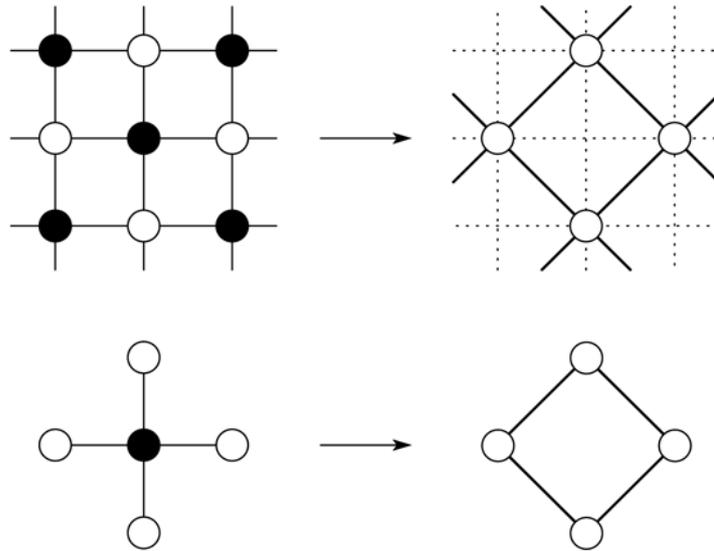


図 27: 正方格子の場合の繰り込みに相当する部分和の取り方. 上側が実際の格子と部分和の関係を表しており, 下側が主要 Boltzmann 因子を考える時に考慮するユニットを取り出したもの.

ために, 非常に多くなる事で複雑な印象を持つかもしれない. しかし先の階層格子での繰り込みの流れに関する議論は同じように考えることが出来る. なぜならば, 単に相対 Boltzmann 因子の空間の次元が大きくなっただけであるからだ. 十分に繰り込んだ場合には, 共通の不安定固定点を目指すという構造は同じである⁵.

さてここまでくれば, やることは同じで復習の段階に入る. 主要 Boltzmann 因子を分配関数から引き出して, 相対 Boltzmann 因子の表示に直しておこう.

$$\left(x_0^{(s)}(K)\right)^{N_B/N_B^{(s)}} z_n^{(s)}[u_\phi^{(s)}(K)] = \left(x_0^{*(s)}(K)\right)^{N_B/N_B^{(s)}} z_n^{(s)}[u_k^{*(s)}(K)].$$

ここで $N_B^{(s)}$ は部分的な和を考えた時のグループ, いわゆるユニットである. 図 27 の場合では 4 本のボンドの中心にあるスピンについて和を取ったので, $N_B^{(s)} = 4$ 本のボンドの繰り込みを考えたというわけである.

さて温度の変換 $D'_s(K)$ をやはり行う事を考える. 正方格子の場合には分配関数の評価が非常に難しいので温度の変換 $D'_s(K)$ の様子を描く事は出来ない. 形式的に階層格子の場合と同じように考えていく事にする.

$$\left(x_0^{(s)}(K)\right)^{N_B/N_B^{(s)}} z_n^{(s)}[u_\phi^{(s)}(K)] = \left(x_0^{*(s)}(K)\right)^{N_B/N_B^{(s)}} z_n^{(s)}[u_k^{*(s)}(D'_s(K))].$$

この場合繰り込みの計算を繰り返す事は想定していない. となると厳密解へと近づくにはどうすればよいか. 繰り込みを繰り返すというのは多くの相互作用の効果を取り込むということである. その

⁵但し, 正直に包み隠さずに言えば, 単調に不安定固定点を目指すのか? また計量空間が変わるために近づくかどうかの議論なども難しい. ここはあくまで期待している部分であり, 数回程度の繰り込みで不安定固定点に近づいているのかは厳密ではない. しかし階層格子の場合については $D'_r(K)$ の様子を描くことによって厳密性に対する期待を補完する事が出来ている.

ため正方格子などでは、ユニットのサイズを大きく取る事で繰り込みの回数を増やす事と同一視する。スピンの部分和を取る範囲としてのユニットのサイズを十分に大きく取れば、相対 Boltzmann 因子による 2 つの曲線 $u_\phi^{(s)}(K)$ 及び $u_k^{*(s)}(K)$ は互いに近づくだろう。これはあくまで期待である。但し十分に大きな範囲でスピンの和を取れば、分配関数の厳密な計算に相当するため、元々同じ分配関数を表現する 2 つの曲線が一致することを期待するのは無理のないことである。その時には $D_s'(K)$ は従来の双対変換における温度の変換と同様の性質を有する。固定点が相転移点を求めてくれるのだから、以下の方程式を解けばよい。

$$x_0^{(s)}(K, K_p) = x_0^{*(s)}(K, K_p). \quad (119)$$

もちろん十分に大きな範囲でのスピンの部分和を取る事は難しいため、上記の方程式をいくつかの形のユニットについて評価して収束する解となるかを見る。実際大きなサイズのユニットを考えていく事によって、相転移点の値はある収束した値へと変化していく期待通りの振る舞いを見せる。

というわけで我々の解析するものは主要 Boltzmann 因子である。当初のものと同様に端のスピンを揃えた状態に対する局所 Boltzmann 因子と定義する。これまでとは違い内部構造を持つため、ユニット内の和を取る必要がある。しかしながらこの性質に注目すると、主要 Boltzmann 因子をユニット上に定義されたモデルの分配関数と見る事が出来る。そのため一般的に以下のように書き下す事が出来る。

$$x_0^{(s)}(K, K_p) = \left[\overline{\sum_{\{S_i\}}^{\text{part}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K\tau_{ij} S_i S_j}} \right]_{\text{av}} \quad (120)$$

$$x_0^{*(s)}(K, K_p) = \left[\overline{\sum_{\{S_i\}}^{\text{part}} \prod_{\langle ij \rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{K\tau_{ij}} + e^{-K\tau_{ij} S_i S_j})} \right]_{\text{av}}. \quad (121)$$

ここで和の記号に書いた線は和をユニットの内部に限定する事を表す。具体的に例を挙げるとすると、図 27 にある黒く塗られたサイトのスピンについて和を取る。対して白く塗られたサイトのスピンは $\{S_i\} = 1$ と上向きに固定しておく。積の記号に書いた“part”はユニット内部にあるボンドのみで積を取ることを指す。

このように表示すると面白い性質がいくつか得られる。まず式 (119) のクエンチ極限 $n \rightarrow 0$ を考える。すると形式的に以下のように表現する事が出来る。

$$\left[\log Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} - \left[\log Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} = 0. \quad (122)$$

ここで $Z^{(s)}$ 及び $Z^{*(s)}$ はユニット上で定義した分配関数であり、以下のように定義する。

$$Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) = \overline{\sum_{\{S_i\}}^{\text{part}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K\tau_{ij} S_i S_j}} \quad (123)$$

$$Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) = \overline{\sum_{\{S_i\}}^{\text{part}} \prod_{\langle ij \rangle} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{K\tau_{ij}} + e^{-K\tau_{ij} S_i S_j}) \right\}}. \quad (124)$$

ここで分配関数の一方に付したアスタリスクは、局所 Boltzmann 因子の形が違うという事を表す。

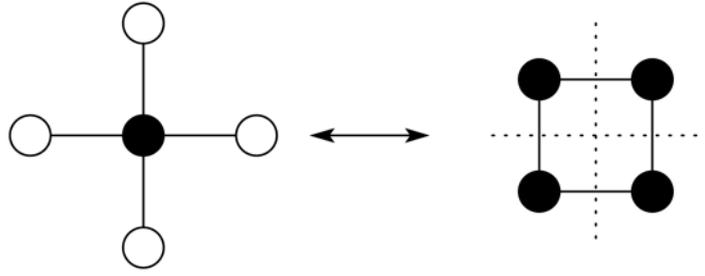


図 28: 図 27 におけるユニット (左側) とそれに対する双対格子 (右側). 黒丸で印をつけたスピンについて部分和を取り, 白丸の部分は上向きで固定する.

5.5 多重臨界点とフラストレーションの分布

ここで格子の形はユニット内に限定しているにせよ, 分配関数の対数を取ったもの, 即ち自由エネルギーの配位平均が現れた. ゲージ変換を利用した自由エネルギーの書き換えを式 (14) で行った事を思い出していただきたい. 式 (122) に登場する左辺第二項はそのまま式 (17) と同じような変形を行う事が出来る.

$$\begin{aligned} & \left[\log Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} \\ &= \frac{1}{2^{N_s^{(s)}} (2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\}) \log Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}). \end{aligned} \quad (125)$$

ではもう一方の $Z^{*(s)}$ はどうだろうか. 同じようにゲージ変換, 式 (5) 及び式 (6) の変形をそのまま行ってみる.

$$Z_G^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) = \overline{\sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{part}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{K\tau_{ij}\sigma_i\sigma_j} + e^{-K\tau_{ij}\sigma_i\sigma_j} S_i\sigma_i S_j\sigma_j)}. \quad (126)$$

これでは複雑になっただけでうまい変形を見出せない. ここで一見奇妙な事を行う. このユニット内の分配関数について再び双対変換を考えるのだ. 正確に言うと第一段階のみである. つまり Fourier 変換だけを $Z^{*(s)}$ に対して行い, 別表現を与えるのだ. 図 28 にあるようなユニットの場合, 図 5 にあげたような単純な正方形における双対変換であるので, 容易に行う事が出来る.

$$Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) = 2^{N_s^{(s)} - \frac{N_B^{(s)}}{2} - 1} Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}). \quad (127)$$

ここで右辺に現れた新しい分配関数は添え字 D の表すように格子の形が図 5 のように変形されたものを考えている. そしてその際に局所 Boltzmann 因子も変わっており, 以下のように書き表される.

$$Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) = \overline{\sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{part(D)}} e^{K\tau_{ij} S_i S_j}}. \quad (128)$$

積の記号にある ‘part(D)’ の添え字は具体的には図 28 の双対な格子を考えて、その上での積に限るという意味である。この分配関数 $Z_D^{(s)}$ は形から分かるとおり、ゲージ不変な格好をしている。そこで式 (127) を利用して式 (122) に現れる第一項を以下のように書き直す事が出来る。

$$\left[\log Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} = \left[\log Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} + \left(N_s^{(s)} - \frac{N_B^{(s)}}{2} - 1 \right) \log 2. \quad (129)$$

そこで再びゲージ変換を利用した変形により、

$$\begin{aligned} & \left[\log Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \right]_{\text{av}} \\ &= \frac{1}{2^{N_D^{(s)}} (2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z_D^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\}) \log Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\}) \end{aligned} \quad (130)$$

を得る。ここで $N_D^{(s)}$ は元々考えていたユニットに対する双対な格子のサイト数である。図 28 にあげる例で言えば、 $N_s^{(s)} = 1$, $N_B^{(s)} = 4$ そして $N_D^{(s)} = 4$ である。上記のようなゲージ変換と双対変換を組み合わせた解析によって相転移点を決定する式 (122) は以下のような関係を表す。

$$\frac{1}{2^{N_D^{(s)}}} S_D^{(s)}(K, K_p) - \frac{1}{2^{N_s^{(s)}}} S^{(s)}(K, K_p) = \left(\frac{N_B^{(s)}}{2} - N_s^{(s)} + 1 \right) \log 2. \quad (131)$$

ここでフラストレーションの分布に関係する量として以下のようなものを定義している。

$$S_D^{(s)}(K, K_p) = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{Z_D^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\})}{(2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \log \frac{Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})}{(2 \cosh K)^{N_B^{(s)}}} \quad (132)$$

$$S^{(s)}(K, K_p) = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{Z^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\})}{(2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \log \frac{Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})}{(2 \cosh K)^{N_B^{(s)}}}. \quad (133)$$

ここで $K = K_p$ という西森線の条件をつけると、式 (131) は多重臨界点が位置するのは、フラストレーションの分布によるエントロピーの差が特別なところである。差を取るのと同じボンド数でありながら格子の構造が双対な関係である 2 つのフラストレーション分布のエントロピーについてである。この意味合いの深そうな関係式の本当の意味するところは未だ分からないが、非常に魅力的な格好をしている。

それでは具体的に式 (122) を評価する事によって多重臨界点の位置をさらに精度良く求めてみよう。

5.6 多重臨界点の位置

階層格子における繰り込みの計算に基礎を置き、正方格子における多重臨界点の位置を精度良く求める計算方法を上で提案した。その心は、ランダムさによる現れるフラストレーションの効果を多く考慮できるようにすること。具体的にはある程度大きなユニット上でのスピンの部分和を取る事である。例えば正方格子に対しては、図 29 のような異なるサイズに対して部分和をとった計算を考えてみよう。本文では $\pm J$ Ising 模型のみを取り扱うが、他のランダムさを持っている場合でも同様の手法を適用する事が出来る。

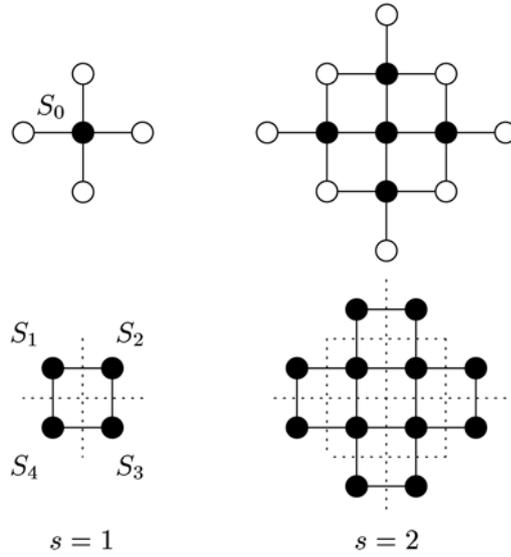


図 29: 正方格子の部分和を多く取るために使用するユニットの例. 上側の図が $Z^{(s)}$ や $Z^{*(s)}$ で表された量を計算するためのユニットであり, 下側がその双対格子であり Z_D を計算する場合に用いる. 黒丸のスピンは部分和を取るものを表しており, 白丸の部分は $\{S_i\} = 1$ と上向きで固定する条件を課す.

まずは図 29 にあるような $s = 1$ のユニットを考えて部分和を取り, 式 (122) を評価してみよう. 基本的な計算方法は, 式 (123) にあるように $s = 1$ のユニット上に定義された分配関数を計算する事である. 具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(K, \{\tau_{ij}\}) &= \sum_{S_0=\pm 1} e^{K(\tau_{01}+\tau_{02}+\tau_{03}+\tau_{04})S_0} \\ &= 2 \cosh\{K(\tau_{01} + \tau_{02} + \tau_{03} + \tau_{04})\} \end{aligned} \quad (134)$$

である. そしてもう一方の双対な分配関数は, 局所 Boltzmann 因子を変えたものを用いて式 (124) のように定義される. これも計算してみると, 以下のように評価できる.

$$\begin{aligned} Z^{*(1)}(K, \{\tau_{ij}\}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \sum_{S_0=\pm 1} \prod_{i=1}^4 (e^{K\tau_{0i}} + S_0 e^{-K\tau_{0i}}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \left\{ \prod_{i=1}^4 (2 \cosh K\tau_{0i}) + \prod_{i=1}^4 (2 \sinh K\tau_{0i}) \right\}. \end{aligned} \quad (135)$$

これは関係式 (127) にあるように, 双対な格子を考えて分配関数 $Z_D^{(1)}$ を計算する事でも同様な結果を導く事も出来る. よって式 (122) において上記の $s = 1$ のユニット上の分配関数を用いる事により, $\pm J$ Ising 模型の相転移点に対して以下のような決定方程式を与える事が出来る.

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau_{ij}} \frac{1}{2^4} \left(1 + \tanh^4 K_p \prod_{i=1}^4 \tau_{0i} \right) \log \left(1 + \tanh^4 K \prod_{i=1}^4 \tau_{0i} \right) \\ &- \sum_{\tau_{ij}} \frac{1}{2} \frac{2 \cosh \left\{ K_p \sum_{i=0}^4 \tau_{0i} \right\}}{(2 \cosh K_p)^4} \log \frac{2 \cosh \left\{ K \sum_{i=0}^4 \tau_{0i} \right\}}{(2 \cosh K)^4} = 2 \log 2. \end{aligned} \quad (136)$$

格子及び模型	部分和と双対変換による結果	数値計算等の結果
正方格子 $\pm J$	$p_c^{(0)} = 0.889972$ [32, 33]	0.8905(5) [35]
	$p_c^{(1)} = 0.890725$ [57]	0.8906(2) [36, 37]
	$p_c^{(2)} = 0.890822$ [57]	0.8907(2) [38]
		0.8900(5) [39]
		0.8894(9) [40]
		0.89081(7) [41]
		0.89083(3) [42]
正方格子 Gaussian	$J_0^{(0)} = 1.021770$ [32, 33]	1.02098(4) [37]
	$J_0^{(1)} = 1.021564$ [57]	1.0193(3) [43]
三角格子 $\pm J$	$p_c^{(0)} = 0.835806$ [34]	0.8355(5) [39]
	$p_c^{(1)} = 0.835956$ [57]	0.83583(6) [43]
	$p_c^{(2)} = 0.835985$ [57]	
六角格子 $\pm J$	$p_c^{(0)} = 0.932704$ [34]	0.9325(5) [39]
	$p_c^{(1)} = 0.932611$ [57]	0.93297(5) [43]
	$p_c^{(2)} = 0.932593$ [57]	
正方格子 Potts($q = 3$)	$p_c^{(0)} = 0.079731$ [32, 33]	0.079-0.080 [44]
	$p_c^{(1)} = 0.079146$ [57]	

表 6: 部分和と双対変換による多重臨界点の結果.

ここで多重臨界点に限って計算してみよう. 西森線の条件 $K = K_p$ の下, 上記の決定方程式を計算すると, $p_c^{(1)} = 0.890725$ を得る. この結果は表 6 において, 数値計算の結果と比較しておく. 具体的には扱わないものの $s = 2$ のユニットにおける計算結果も述べておくと, $p_c^{(2)} = 0.890822$ であり, $s = 1$ のユニットを使った場合からさらに少しだけずれる. 変化幅を比べれば分かるが, 何か定まった値を目指しているように振舞っていることが分かる.

他のランダムさの例としてガウス型を考えた場合, 格子を三角格子, 六角格子等へと拡張した場合も表 6 に載せておく. Potts 模型のゲージ変換を構成して, これまで考えてきたようなスピングラス模型と似たものを考える事も出来る. この場合に対しても応用が利き, 多重臨界点の位置を計算する事がやはり出来る. 以上のように素朴に双対変換を施すだけでなく, 系の特徴を捉えた部分和をとる事によって, スピングラス模型を始めとするランダムスピン系において相転移点を精密に求める事が出来る.

次は多重臨界点以外の相転移点について詳しく見ていく事にしよう. そこではこれまで考えてきた手法の正当性をよりはっきりと確認する事が出来るだろう.

5.7 ランダムさの少ない領域での相境界の厳密解

式 (122) を評価する事で相境界に関する情報を得る事が出来る. 部分和をとるユニットを大きくとれば, その精度もよくなっていく. しかしながら実際的な計算においては, ユニット上の分配関数の計算と $\{\tau_{ij}\}$ に関する配位平均が必要となるため容易ではない. そこで配位平均に関する計算量を抑える近似として, ランダムさが非常に少ないとしてみよう. 即ちランダムさの少ない

領域では、相境界がどのように変化するかということを再び考えてみよう。この計算は先ほど比較した Domany の摂動論の結果 (106) と一致するかを見る事が出来て、双対変換と繰り込みの計算の正当性を見るのにも都合が良い。

そこで式 (122) において、 $\Delta p = 1 - p$ を非常に小さいという極限を考える。すると以下の式を得る事が出来る。

$$\left(1 - N_B^{(s)} \Delta p\right) (\log Z_0^*(K) - \log Z_0(K)) + \Delta p \sum (\log Z_1^*(K) - \log Z_1(K)) = 0. \quad (137)$$

ここで Z_0 及び Z_0^* は配位平均の中でも全てのボンドで強磁性的相互作用をとった場合の分配関数を表す。そして Z_1 と Z_1^* はユニット上でひとつのボンドだけが反強磁性的相互作用を取った場合の分配関数を表す。そのためこのボンドが反強磁性かという $N_B^{(s)}$ 個の場合に関する和を考える必要がある。本来の配位平均では、全てのボンドにおいて強磁性的か反強磁性的かの $2^{N_B^{(s)}}$ 通りの和を取らなければならなかった。ここで注意してもらいたいのは、この計算ではその和を (近似する事により) $N_B^{(s)}$ 個の和に落とす事が出来ている。さてランダムさの導入による相境界の変化を調べるために、転移点を自己双対格子の Ising 模型の転移点 $K_c (= 1/T_c)$ からずらす。つまり $K_c + \Delta K$ ($\Delta K \ll 1$) とすると、

$$\Delta K \left(\frac{1}{Z_0^*} \frac{dZ^*}{dK} - \frac{1}{Z_0} \frac{dZ}{dK} \right) + \Delta p \sum (\log Z_1^*(K_c) - \log Z_1(K_c)) = 0. \quad (138)$$

を得る。ここでランダムさのない場合の転移点の条件である $Z_0^*(K_c) = Z_0(K_c)$ を利用した。上記の式から相境界の傾きをランダムさが非常に少ない領域で評価する事が出来る。

$$\frac{\Delta K}{\Delta p} = - \frac{\sum (\log Z_1^*(K_c) - \log Z_1(K_c))}{\frac{1}{Z_0^*} \frac{dZ^*}{dK} - \frac{1}{Z_0} \frac{dZ}{dK}}. \quad (139)$$

これが相境界の傾きの決定方程式である。Domany の摂動論と比較しやすいように変形しておく。

$$\frac{1}{T_c} \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{1}{K_c} \frac{\sum (\log Z_1^*(K_c) - \log Z_1(K_c))}{\frac{1}{Z_0^*} \frac{dZ^*}{dK} - \frac{1}{Z_0} \frac{dZ}{dK}}. \quad (140)$$

配位平均の計算量の問題を克服したとしても、分配関数である Z_0 , Z_0^* , Z_1 , 及び Z_1^* の評価の問題がある。スピンの和を取るための計算で単純には $\sim O(2^{N_B^{(s)}})$ だけの計算量が必要である。正方格子など通常扱われる例ではそれなりの工夫が必要である。例えば数値転送行列法 [58] であれば多少は計算量の問題は改善できる。一方で階層格子であればこれまでに紹介したように基本的には漸化式を解くだけであるので、この膨大な計算量は大幅に縮小できる。

ユニットのボンド数が u_B である時は、 s 回入れ子式で構成した階層格子全体ではボンド数は $N_B = u_B^s$ である。1回の繰り込みをこの系に対して行う時には格子全体では N_B/u_B 回の繰り込みが必要である。そこから更に繰り込みを行うと N_B/u_B^2 回の繰り込みが必要である。これを続けて考えると分配関数の計算に関する計算量は $O(N_B/u_B + N_B/u_B^2 + \dots) \sim O(N_B^2)$ となる。そこで式 (140) に従って、 $\pm J$ Ising 模型の場合にランダムネスが非常に弱い極限での相境界の傾きを調べた。自己双対な階層格子、 $b = 2, 3$ 及び 4 の場合についての結果を表 7, 8, 及び 9 にそれぞれまとめしておく。これによると自己双対格子 $b = 2$ の場合については摂動論による Domany の結果と双対変換と繰り込み群の結果が漸的に一致する事がわかる。一方で自己双対格子 $b = 3, b = 4$ の場合については Domany の結果とは異なるものを得る。これらの階層格子では、ランダムさ

$b = 2$	$\pm J$ Ising 模型	ボンド希釈型 Ising 模型
繰り込み回数	傾きの値	傾きの値
1	3.238670311607941	1.3313280689632047
2	3.213721581962695	1.3295847287696935
3	3.209840157687296	1.3293096628059718
4	3.209227717235686	1.3292661587550924
5	3.209130853824536	1.3292592754393175
6	3.209115527844001	1.3292581862702618
7	3.209113102764629	1.3292580139255745
8	3.209112719032133	1.3292579866545563
9	3.209112658312095	1.3292579823393163
10	3.209112648704037	1.3292579816564926
11	3.209112647183702	1.3292579815484458
12	3.209112646943131	1.3292579815313489
13	3.209112646905064	1.3292579815286436
14	3.209112646899041	1.3292579815282155
15	3.209112646898088	1.3292579815281478
16	3.209112646897937	1.3292579815281371
摂動論による結果 [51, 54]	3.209112646897908	1.3292579815281351

表 7: スケール因子 $b = 2$ の自己双対階層格子における $\pm J$ Ising 模型とボンド希釈型 Ising 模型に対する相境界の傾き.

$b = 3$	$\pm J$ Ising 模型	ボンド希釈型 Ising 模型
繰り込み回数	傾きの値	傾きの値
1	3.287620710287408	1.3346666036511970
2	3.279280357814356	1.3341234975081161
3	3.278702594934052	1.3340857362686508
4	3.278662410902251	1.3340831090945090
5	3.278659615086040	1.3340829263029411
6	3.278659420560328	1.3340829135847418
7	3.278659407025692	1.3340829126998396
8	3.278659406083984	1.3340829126382702
9	3.278659406018462	1.3340829126339864
10	3.278659406013903	1.3340829126336883
11	3.278659406013586	1.3340829126336676
摂動論による結果 [51, 54]	3.209112646897908	1.3292579815281351

表 8: スケール因子 $b = 3$ の自己双対階層格子における $\pm J$ Ising 模型とボンド希釈型 Ising 模型に対する相境界の傾き.

$b = 4$	$\pm J$ Ising 模型	ボンド希釈型 Ising 模型
繰り込み回数	傾きの値	傾きの値
1	3.434735249924405	1.3441930333807548
2	3.438341429422663	1.3444508638305390
3	3.438917613643436	1.3444906297718794
4	3.439007297242741	1.3444967410351193
5	3.439021128918736	1.3444976788451403
6	3.439023254536054	1.3444978226701897
7	3.439023580721387	1.3444978447219644
8	3.439023630745810	1.3444978481026600
9	3.439023638415719	1.3444978486209216
10	3.439023639591570	1.3444978487003697
11	3.439023639771829	1.3444978487125488
摂動論による結果 [51, 54]	3.209112646897908	1.3292579815281351

表 9: スケール因子 $b = 4$ の自己双対階層格子における $\pm J$ Ising 模型とボンド希釈型 Ising 模型に対する相境界の傾き.

の効果が繰り込み群の観点から有意に効く事を示唆している. つまりナイーブな摂動論から見える効果以上のものが現れるのだ. このランダムさの効果が有意にくかどうかを判定する Harris の基準を検証すると, 自己双対格子 $b = 2$ の場合はランダムさは有意に効かないことが分かる. 一方で $b = 3$ 及び 4 の場合はランダムさが有意に効く系であることも知られている [59]. この傾向を双対変換と繰り込み群を併用した手法は捉えており, なおかつ漸近的に厳密解を導出する事が出来る事がわかる. その意味で従来手法を大きく越えた枠組みである事がわかる.

これらの事情は他のランダムさを持った場合でも同様であり, ボンド希釈型のランダムさを持つ場合の傾きについても検証した結果を表 7, 8, 及び 9 に同様に載せておく. これらの場合についても $b = 2$ の自己双対格子については摂動論の結果を再現している. しかし一方で $b = 3$ 及び 4 の場合については, ランダムさが有意に効いている性質を反映して摂動論の結果とは異なる値を導出している.

さらにこの傾きの値が厳密解に収束していく様子をプロットすると, 興味深い特徴が浮かび上がる [60]. 図 (30) にあげるのがそのプロットである. 横軸に繰り込み計算を行ったユニット内にあるボンド数の逆数を取り, 縦軸に式 (140) の計算結果と厳密解との差をそれぞれ両対数プロットで表した. すると綺麗な直線にのるようなスケール関数が存在する事がわかった. このスケール関数はランダムさの効果が非常に少ない領域における傾きに関して成立するだけで, 多重臨界点などではどうなるかは分からない. しかしながら漸近的に厳密解に近づいている様子を見ると, この双対変換と繰り込み群を利用した解析手法の有効性が非常にはっきりと伝わるのではないだろうか.

では正方格子の場合はどうであろうか. 正方格子の場合は計算量の問題で, 精度のよい漸近解を得る事は出来ない. 数値転送行列法によって比較的大きいサイズまでスピンの和を取るユニットを考える. そしてユニットの大きさを段階的に大きく取る事で, 外挿的に結果を得る事を考えてみる. 考えたユニットの形はこれまでと同様に図 31 にある規則で構成する事にした. ユニットのサイズをこれまでと同様に s で指定する. 式 (140) を $s = 9$ までのユニットを用いて評価した

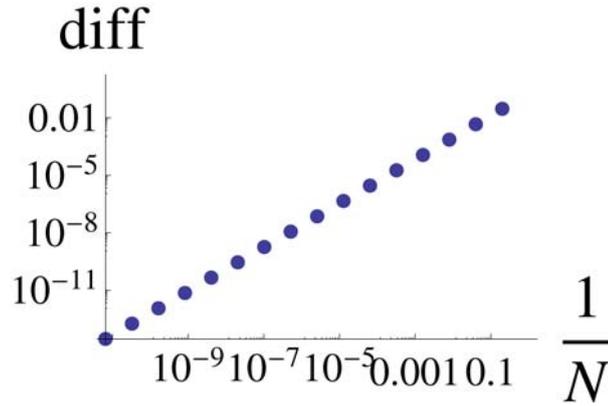


図 30: 厳密解からのずれと繰り返りで利用するユニット内のボンド数との関係. 両対数プロットで直線に乗る事がわかる.

結果を表 10 にまとめておく. これを見ると正方格子の場合は摂動論の結果と異なる値に収束して

正方格子 サイズ s	$\pm J$ Ising 模型 Slope	ボンド希釈型 Ising 模型 Slope
1 ($N_B^{(1)} = 4$)	3.3366	1.3378
2 ($N_B^{(2)} = 16$)	3.3166	1.3363
3 ($N_B^{(3)} = 36$)	3.2935	1.3350
4 ($N_B^{(4)} = 64$)	3.2816	1.3342
5 ($N_B^{(5)} = 100$)	3.2736	1.3337
6 ($N_B^{(6)} = 144$)	3.2679	1.3333
7 ($N_B^{(7)} = 196$)	3.2636	1.3330
8 ($N_B^{(8)} = 256$)	3.2602	1.3328
9 ($N_B^{(9)} = 324$)	3.2575	1.3326
摂動論 [51, 54]	3.2091	1.3293

表 10: 正方格子における相境界の傾き. $\pm J$ Ising 模型とボンド希釈型 Ising 模型の場合.

いきそうに見える. 正方格子における Ising 模型の場合, Harris の基準に照らしてみるとランダムさの効果はちょうどマージナルである⁶. そのためランダムさの効果が見れても構わない. しかしながら, 階層格子の場合と比較すると, まだまだ小さなユニット内でしか部分和を取れていないといえる. そこで先ほど見つけたスケーリング関係が, 正方格子の場合にも成立していると仮定して, 外挿的により正確な傾きの値を見積もってみる. 臨界現象において転移点をスケーリング則から見つけるのと同様, いくつかの解の候補により, プロットを何度も行う. 直線にぴたっと重なる場合を推定解として採用するのだ. 実際の様子を図 (32) に載せる. 左側が傾きの推定値を 3.22 とした場合, 右側が推定値を 3.23 とした場合である. 直線に綺麗に乗るような, 傾きの正確な値は 3.22 から 3.23 の間である事が, このスケーリングプロットから分かる. Domany は摂動

⁶詳しい記述は本解説記事の本筋からはそれるため省くが, 比熱の温度に対する発散に関する臨界指数 α の値が鍵を握っている. 但し階層格子の場合はより深い考察が必要である事を注記しておく [59].

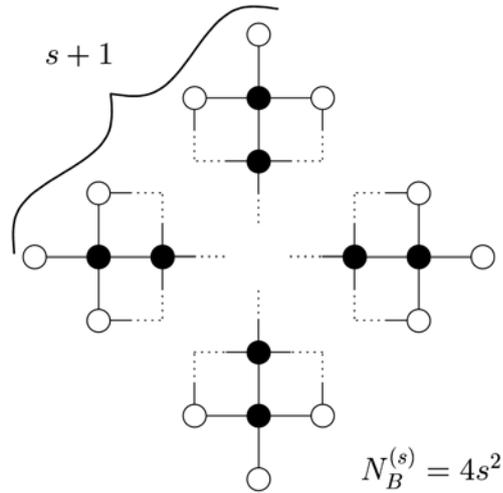


図 31: 正方格子の場合に利用する系統的なユニット.

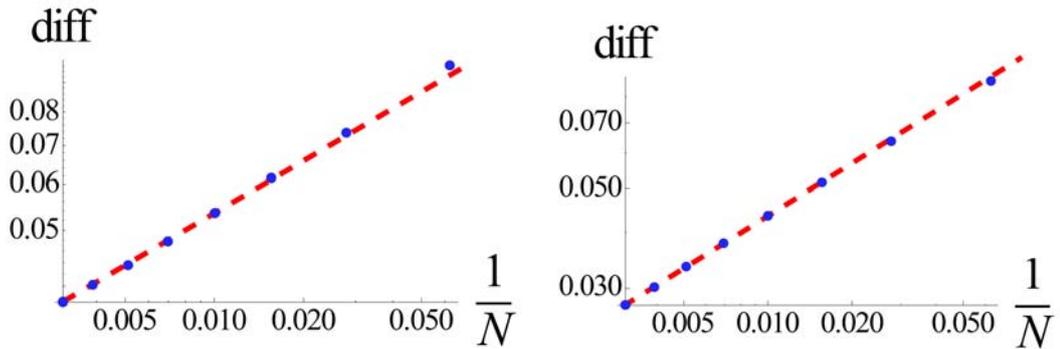


図 32: 正方格子における傾きの値に対するスケーリングプロット. 左側が傾きの推定値を 3.22 とした場合, 右側が推定値を 3.23 とした場合である.

論を正方格子の場合に対していくつかの考察と状況証拠を元に正当化したが, 部分和と双対変換の結果の外挿による推定はそれを覆す結果を導いたのだ.

実際に大規模な数値計算で検証した例をいくつかあげよう. まず Pfaffian による有限サイズ効果以外は厳密な取り扱いによるものがある. これは 700×701 に及ぶサイズの上で原理的な計算を行っており, $p = 1$, 及び $p = 0.9$ の転移点をナイーヴに結んで傾きを求めている. 結果は 3.1655 である [61]. また大規模なモンテカルロ計算で, $p = 1$, 及び $p = 0.9$ における転移点を結んで求めた傾きは上記と一致する値を導く. そして $p = 1$, 及び $p = 0.99$ まで接近した転移点を結んで求めた傾きは, 3.263(15) [62] という値を導く. 両者の値を見るに, 相境界のランダムさが少ない領域では図 (33) のような構造をとっていることが想像される. 想像ではあるが, 図のような形状をしている場合, 数値計算で相境界を正確に見積もろうとするには限界があることが伺える. しかしながら本解説記事で紹介してきたような双対変換と繰り込みを併用した方法が正方格子においても厳密な解を与えるとすると, 相境界を導く事に関してはナイーヴな摂動論がうまくはたらかないことを示唆している. 当然ながら, 客観的な立場に立って物事を言うべきで, 正方格子に

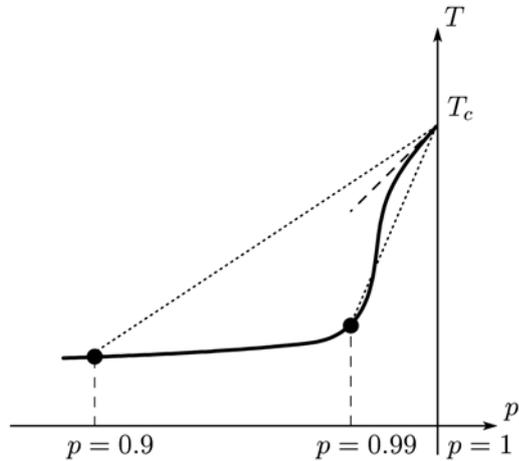


図 33: これまでの結果から類推される相境界の複雑な形状. 破線が双対変換と繰り込みを併用した手法が求めようとしている傾きである.

対しての双対変換と繰り込みの手法がうまくいく事を完全に証明してはいない. そのため上記の結果にはまだ不安が残ってはいることは指摘しなければならない. これまで解析手法が全くない, といっていぐらいに有限次元のスピングラスの問題に切り込める手法は少なかった. 最悪その結果が近似的ではあったとしても, 具体的に相転移の問題に切り込める手法ができるという事は非常に重要である.

また有限次元のスピングラスの研究においてこれまでに蓄積されてきた結果に上記のように疑問が投げかけられる, というのは深刻な問題である. ランダムさを持つ系に対する基本的な解析手法として部分和と双対変換の方法が, スピングラス理論の歴史の中で重要な位置づけとなりうることを最も特徴付けている格好の例であると筆者は感じている.

5.8 スピングラス模型への双対変換の更なる応用

もちろん有限次元のスピングラスの問題を真っ向から立ち向かう場合, 2次元の問題はさして面白くないと考える向きもある. しかしながら以下にあげるように, これまで誰もなしえなかったスピングラスの重要な基本問題に対して, 双対変換は答えを出してくれる. 2次元においてスピングラス相は安定的に存在するかどうかである. 数値計算等の状況証拠 [63, 64, 65, 66, 67, 69, 70, 71] 以上のものは今まで与えられなかったこの問題に対して, 解析的に非常に正確な解答を与える事が出来るのだ.

具体的には, 対称分布と呼ばれるランダムさが一番強い状況の時, 有限温度でスピングラス転移は存在しない事を示すことが出来る. これは $\pm J$ Ising 模型では $p = 1/2$ ($K_p = 0$) の場合に対応する状況である. これまでに議論してきた大半が, 多重臨界点の話に関係していたものである. そこから急に対称分布という言葉が出てきて驚くかもしれないが, 実は多重臨界点の解析を通じて対称分布での性質を間接的に見る事が出来る. レプリカ法を紹介した部分で登場した式 (27) を利用するのだ. どのような関係であったかという, 西森線上での分配関数と対称分布での分配関数が自明な定数を除いて一致するという関係である. これで解析の方針が見えてきたと思われる. 対称分布での相転移を解析するために, 多重臨界点の解析を援用するのだ. その結果として対称分布での相転移点を得る事によって, クエンチ極限では有限温度での相転移が消えることが

示される。但し注意したいのは式 (27) は異なるレプリカ数での分配関数同士を関係付ける事だ。そのため本来の目標とするクエンチ極限を取るためには、どのようにレプリカ数を扱うかを気をつけねばならない。

上記の部分和を利用した双対変換で任意のレプリカ数に応じた多重臨界点を導出する事が出来る。ここで一般的に話を進めるために主要 Boltzmann 因子 $x_0^{(s)}$ について再び考える。格子に部分的なユニットを考えて、適切な境界条件の下で部分和をとるのであるから分配関数と見なす事が出来る。そこで任意のレプリカ数 n に対して以下のように書き下す事が出来る。

$$x_0^{(s)}(K, K_p) = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{part}} e^{K_p \tau_{ij}} Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^n. \quad (141)$$

ここで再びゲージ変換による書き換えを行う。これまでと同様に配位平均に相当する指数関数部分が、結合定数 K_p を持つ Boltzmann 因子に相当する事を考えると以下のように書き換える事が出来る。

$$x_0^{(s)}(K, K_p) = \frac{1}{2^{N_s^{(s)}} (2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\}) Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^n. \quad (142)$$

一方、離散的 Fourier 変換後の主要 Boltzmann 因子 $x_0^{*(s)}$ では、式 (126) で見たようにゲージ不変ではない項 $Z^{*(s)}$ が存在する。

$$x_0^{*(s)}(K, K_p) = \frac{1}{(2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle}^{\text{part}} e^{K_p \tau_{ij}} Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^n. \quad (143)$$

そこでユニット上での双対変換を考える。これはすでに式 (127) で与えられている。その関係式を利用してゲージ不変な形である $Z^{*(s)}(K, \{\tau_{ij}\})$ からゲージ不変であるような $Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})$ へと書き換える事が出来る。すると双対な主要 Boltzmann 因子 $x_0^{*(s)}$ は、同様にゲージ変換による計算で以下のように書き下す事が出来る。

$$x_0^{*(s)}(K, K_p) = \frac{2^{n(N_s^{(s)} - N_B^{(s)}/2 - 1)}}{2^{N_D^{(s)}} (2 \cosh K_p)^{N_B^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z_D^{(s)}(K_p, \{\tau_{ij}\}) Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^n. \quad (144)$$

よって一般のレプリカ数 n に対して多重臨界点を求めるためには、 $x_0^{(s)} = x_0^{*(s)}$ を西森線の条件 $K = K_p$ の下解けばよい。

$$\frac{2^{n(N_s^{(s)} - N_B^{(s)}/2 - 1)}}{2^{N_D^{(s)} - N_s^{(s)}}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z_D^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^{n+1} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} Z^{(s)}(K, \{\tau_{ij}\})^{n+1}. \quad (145)$$

この式で決定される多重臨界点の位置が、式 (27) を通して、対称分布の転移点と対応する。式 (27) を丁寧に読み返すと、レプリカ数 n に対する多重臨界点がレプリカ数 $n+1$ に対する対称分布の相転移点に対応する。そこでクエンチ極限 ($n \rightarrow 0$) の対称分布の問題を考えるには、奇妙な極限ではあるが、 $n \rightarrow -1$ という極限を考える必要がある。つまり $n \rightarrow -1$ 極限で得られる多重臨界点の位置が、クエンチ極限での対称分布の転移点を与えるのだ。ユニット上での有限サイズでの和を取っているので $Z^{(s)}$ 及び $Z_D^{(s)}$ には特異性がない事に注意してもらいたい。

証明の方針としては、まず有限温度 $T_{SG} = 1/K_{SG}$ での相転移点を仮定する。この条件の下では式 (145) を満たす事が出来ない事から、背理法で対称分布における有限温度の相転移の存在が否定される。

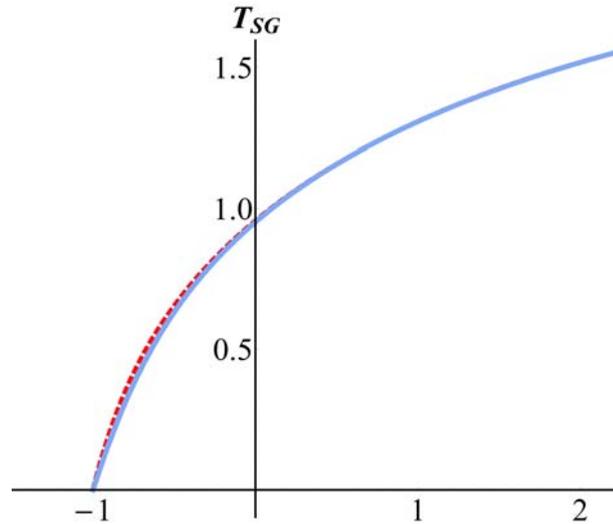


図 34: 破線で示したのが、部分和を用いずに双対変換で得られた転移点のプロット．実線で示されたものが部分和を用いた結果である．非常に小さい幅ではあるが、転移点に変化している様子が伺える．しかしながら $n = -1$ では絶対零度をどちらの場合も示す．

実際にこの流れで考えていこう．有限温度の場合、 $Z^{(s)}$ と $Z_D^{(s)}$ にはなんらかの有限の値が与えられる．ここで式 (145) において $n \rightarrow -1$ 極限を取ると以下の式を得る．

$$2^{N_D^{(s)} - N_B^{(s)}/2 - 1} = 1. \quad (146)$$

ここで様々なサイズのユニットを考えると、幾何学的な関係から $N_D^{(s)} \neq N_B^{(s)}/2 + 1$ である事がいえる．結果として、式 (146) を満たす事は出来ない事が分かる．証明としては以上である．式 (145) が成立する限り、この解析的な結論は適用できる．そのためゲージ対称性が備わっている模型に対して成立する．例えば $\pm J$ Ising 模型、ガウス型のランダムボンドの Ising 模型、他にも Potts ゲージグラス模型などが適用範囲内である．そして双対変換を用いるため自己双対格子のみに限る．具体的には正方格子や、自己双対な階層格子である．三角格子や六角格子の場合も、星・三角変換を施す事によって同様の結果を導く事が可能である．他にも 3 体相互作用を持つ Ising 模型で三角格子、ユニオンジャック格子なども自己双対な格子の例として挙げられる．また全く同様にして 4 次元のランダムな相互作用をするゲージプラケット模型についても、この節で紹介した双対変換と部分和を利用した解析が可能である．そのため、対称分布でスピングラス相が有限温度にわたって存在しないという事実は、非常に広い適用範囲を持つ解析的な結果といえる．

せっかくなので、具体的な例として $\pm J$ Ising 模型の場合について、転移点がどのようにレプリカ数に応じて変化をしていくのかを見てみよう．対称分布における転移点 T_{SG} がレプリカ数 n の関数としてどのように振舞うかを、 $x_0^{(s)} = x_0^{*(s)}$ を用いて具体的に計算した結果が図 34 にある．こ

れを見ると部分和をとることによって、転移点が各レプリカ数でわずかに変化している事が分かる。しかしながら、 $n \rightarrow -1$ に相当するところでは、部分和をいくらとっても、 $T_{SG} \rightarrow 0$ とつぶれたまま変化していない事がわかる。そのため任意のユニットを使っても有限温度の相転移が示される事はない事がわかる。実際上記の証明によってそれをサポートした解析を行うことができた。完全な数学的証明といえるには、ユニットを非常に大きく取った部分和によって、多重臨界点の厳密解が出せるかどうかにかかっている。そのため階層格子では完全な証明といえるであろうが、正方格子などの格子では正確にはまだ不完全な議論である。但し、有限次元のランダムボンド型 Ising 模型に対するスピングラスの存在に関して解析的に強い証拠を得たのは、大きな成果であるといえる。

6 情報統計力学としての有限次元スピングラス

有限次元のスピングラス理論のひとつとして、双対変換が有効である事をここまでは紹介してきた。それでは有限次元のスピングラス模型の解析自体を超えて、応用的な側面として何か役に立てるような舞台はあるのだろうか？平均場理論も含めたスピングラス理論を、物理から飛び出して学習の理論や情報通信の性能評価に応用しようとする研究の一連の流れがある。今日では**情報統計力学**と呼ばれる一分野を築くに至っている [11, 72]。多くの研究成果がある中で、このような異分野の問題に対して本解説記事のような有限次元のスピングラス模型の解析手法が生きる道はあるのだろうか。

6.1 データの読み出し問題とスピングラス

それでは、具体的に有限次元のスピングラス模型に対応するような情報の模型をここで構成してみよう。簡単な例題として、データの読み出しを想定したような設定の問題を考える。2進数で表現された情報を格子点上に載せた情報媒体を想定する。身近な例で言えば、たとえば CD, DVD, そして BD や HDD などの円盤型のメディアに動径方向と直交するように記録されたある種の配列が情報を表現している事を想定する。つまり 1次元方向に伸びた配列から情報を読み出そうというわけだ。現実の情報媒体の読み出し技術がどのようなになっているか、勿論ここにも議論すべき点や注目する点はあるが、ここでは有限次元スピングラスの模型と対応しうる事を解説することに重きを置く。

6.1.1 1次元の読み出し問題と Ising 模型

局所的に図 35 のように 1次元鎖状におかれた N 個の情報の系列において、サイト i で情報媒体からデータ x_i をある強度 A で増幅して読み出す事を再び考える。ここで x_i はスピン模型と対応付けることを念頭において、 $x_i = \pm 1$ とする。この 2値性をいわゆるデジタル情報の 0, 1 と対応させる。また増幅させる必要があるのは、この読み出しの際に、予期しない影響としてノイズ v_i が混入すると考えられるからだ。このノイズの影響で得られる情報が変化してしまう可能性がある。そのためある程度増幅させておかなければ読み出しは正しくできないだろう。この時に得られる情報を y_i と記すと、この状況は以下のような関係が成り立つ。

$$y_i = Ax_i + v_i. \quad (147)$$

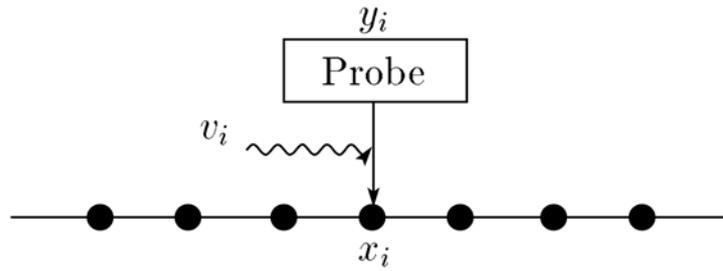


図 35: 1次元鎖状におかれた情報の系列. デバイスで x_i をひとつずつ読み出し、右方向にスライドしていく.

極めて素朴であるが現実には起こりうる最小限の設定といえる. このように読み出しの状況をモデル化して, 原情報 x と得られた情報 y との間にどれだけ強く関係が残るかという事を評価するというのが基本的な問題となる.

6.1.2 相互情報量と分配関数

さて上記のような情報の読み出し問題に対して, 情報の相関という観点から読み出し技術の性能評価を行ってみる. この性能評価の解析の基本となる量が**相互情報量**と呼ばれる量である. 相互情報量とは2つの確率変数 (X, Y) の確率分布関数 $\Pr(x), \Pr(y)$ に関する量であり, 以下のように定義される.

$$I(X; Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \Pr(x, y) \log \frac{\Pr(x, y)}{\Pr(x)\Pr(y)}. \quad (148)$$

ここで $\Pr(x, y)$ は X, Y の同時分布関数である. この相互情報量が, 原情報と読み出し後に取得した情報の間の相関のひとつの指標となっている. 原情報と読み出し後に取得した情報が完全に相関している場合は情報の読み出しの意味では大成功であり, 無相関となってしまった場合はノイズによって得られた情報が完全に乱されている事が分かる. ここでは相互情報量の解析を通して, 情報の読み出しの性能評価を行うことを考えてみよう⁷. 同時分布関数 $\Pr(x, y)$ は条件付確率 $\Pr(x|y)$ (y が起こった下での x の確率) や $\Pr(y|x)$ (x が起こった下での y の確率) によって, 定義により以下のように表現される.

$$\Pr(x, y) = \Pr(x|y)\Pr(y) = \Pr(y|x)\Pr(x). \quad (149)$$

この関係から相互情報量を以下のように分解する事ができる.

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (150)$$

ここで $H(X), H(Y)$ はエントロピー関数であり,

$$H(X) = - \sum_{x \in X} \Pr(x) \log \Pr(x), \quad H(Y) = - \sum_{y \in Y} \Pr(y) \log \Pr(y) \quad (151)$$

⁷ここでは得られた情報から原情報を推定するという, 推定問題の性能評価ではなく, あくまで原情報と得られた情報の相関関係を調べている事に注意. 勿論非常に似た形式でその種の推定の問題についても解析は進められる [11, 72].

であり、一方 $H(X|Y), H(Y|X)$ は条件付エントロピーと呼び、以下のように定義する。

$$H(X|Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \Pr(x, y) \log \Pr(x|y), \quad H(Y|X) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \Pr(x, y) \log \Pr(y|x). \quad (152)$$

この分解により、相互情報量の意味あいが解釈しやすくなる。ある事象が起こった時にどれだけの驚きを持つのかを量として表現して、平均をしたものをエントロピー関数と呼ぶ。この事を念頭において、全く未知の状況で Y を知るのと、原情報 X を知った下で Y を知る事を考えてみよう。原情報と得られる情報が全く独立な場合は同じである時には $H(Y)$ と $H(Y|X)$ は等しくなるために相互情報量は 0 となる。一方原情報と得られる情報の間に相関関係が眠っている時には相互情報量は 0 ではない値を取る。つまり Y を知る驚きが X を知る事によってどれだけ低減するかを示しているのである。そのような量を調べる事によって原情報 X と得られる情報 Y の間の関係を定量的に解析してみようというわけだ。このように分解すれば話はもう少しコンパクトになり、相互情報量を評価するためには、2つのエントロピー関数を評価すればよいという事になる。先ほどのように X を原情報の集合、 Y を情報読み出し後に得られる情報の集合として考えてみよう。原情報 X を指定した場合、 Y は式 (147) にあるようにノイズの印加のみで完全に決定する。このことから条件付確率 $\Pr(y|x)$ は、ノイズの確率分布関数そのものである。例えばノイズ v_i の確率分布関数として、分散 σ^2 の各サイト毎に独立なガウシアンを想定すると、

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N v_i^2 \right) \quad (153)$$

となる。そのため $H(Y|X)$ の内部に対数関数があっても評価はそう難しくない。問題はエントロピー関数 $H(Y)$ の評価である。このエントロピー関数の評価には対数関数を通して、全ての事象についての和というのがある。ここまできると、雰囲氣的にスピングラスの統計力学との対応関係が感じ取られるかもしれない。スピングラスの解析において自由エネルギーの評価をする時、対数関数を通した和を取る必要が生じた、配位平均である。そこで対数を通しての全事象についての和を取る困難さを回避するために、スピングラス模型の解析においても利用したレプリカ法を利用する。

$$H(Y) = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sum_{y \in Y} \Pr(y) \{\Pr(y)\}^n - 1}{n}. \quad (154)$$

するとスピングラス模型に対するレプリカ法による解析の場合 (19) のように、べきで表される量の和を考えればよいという事がわかる。こうしてみると、ここで現れている $y \in Y$ についての和がスピングラス模型において配位平均と呼ぶものに対応していることになる。そう思ってエントロピー関数 $H(Y)$ の定義式 (151) と自由エネルギーのゲージ変換による別表現 (17) を眺めてみるとスピングラス模型の分配関数が $\Pr(y)$ に対応している事も見える。それでは分配関数に対応しているという $\Pr(y)$ はどのような性質を持っているのだろうか。 $\Pr(y)$ を条件付確率を用いて書き直してみると、

$$\Pr(y) = \sum_{x \in X} \Pr(y|x) \Pr(x) \quad (155)$$

とかける。ここで原情報についての確率分布関数 $\Pr(x)$ について考えると、様々な系列のデータが存在しうる事を考えると、一様分布 $\Pr(x) = 1/2^N$ としてよいだろう。すると $\Pr(y)$ を評価するためにはあらゆる事象 X についての和を取る必要があり、これもまたありありと分配関数との対

応をはっきりとさせてくれる． Boltzmann 因子に相当するのが条件付確率 $\Pr(y|x)$ であることも見えてくる． さてここまでくると問題はそう難しくない．

レプリカ法に基づいた解析法をおさらいしてこう． $\sum \Pr(y) \{\Pr(y)\}^n$ は上記の事から以下のように評価する事ができる．

$$\sum_{y \in Y} \Pr(y) \{\Pr(y)\}^n = \frac{1}{2^{(n+1)N}} \sum_{y \in Y} \left(\sum_{\{x^0\}} \Pr(y|x^0) \right) \left(\sum_{\{x^\alpha\}} \prod_{\alpha=1}^n \Pr(y|x^\alpha) \right). \quad (156)$$

問題は条件付確率 $\Pr(y|x)$ であるが，これはノイズの確率分布関数 (153) そのもので与えられる． $v_i = y_i - Ax_i$ と表現されることから

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i)^2 \right\} \quad (157)$$

となる．指数関数の肩の部分を展開してみると，これは以下のように独立な Ising スピンにランダムな磁場がかかった模型である事が分かる．

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N Ay_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{NA^2}{2\sigma^2} \right). \quad (158)$$

元の問題設定を考えてみると，すぐに気づく事であるが，各サイトにある情報を独立に読み出している．それがスピン模型に対応させた時であっても，独立な Ising 模型になった定性的な理由である．また Boltzmann 因子の部分を見れば分かるが原情報と得られる情報が揃う確率は受信強度 A が強くなればなるほど大きくなる事が見える．これは定性的にも理解できる事である．ノイズの効果をものともせず情報を正しく読み出しができるように， A というのは設定されたパラメータなのだから．単純な設定であるため，これまで見てきたようなスピングラス模型のような複雑な構造をまだ持っていない．そうすると，最初の情報の読み出しの模型をもう少し複雑にしても，スピングラス模型を扱ってきた我々にとってはまだまだ許容範囲である．情報の読み出し問題において生じる現実的な問題を少しずつ取り入れてみよう．

6.1.3 1次元の干渉つきの読み出し問題

再びデータの読み出しの問題を考えるが，読み出しの際に周囲の状況からの干渉を受けるといふ事を考える．データを表現する素子を高密度高集積化している現状に対しては，実際にこのような影響を考慮したうえで，正確な情報の読み出し技術を開発，そして評価を行っていかないといけない．例えば1次元的なデータ配列を考えた場合，図 36 のように i サイトの右側に隣接するサイト $j = i+1$ からの干渉を受ける場合である．その場合得られる情報 y_i は，干渉による効果を表す係数 γ により，

$$y_i = Ax_i + v_i + \gamma x_j \quad (159)$$

と表現される．これまでの無線通信や独立なデータの読み出し問題と同じように，スピングラス模型への変換を試みよう． Boltzmann 因子に対応する条件付確率 $\Pr(y|x)$ を書き下してみると，

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - \gamma x_j)^2 \right\} \quad (160)$$

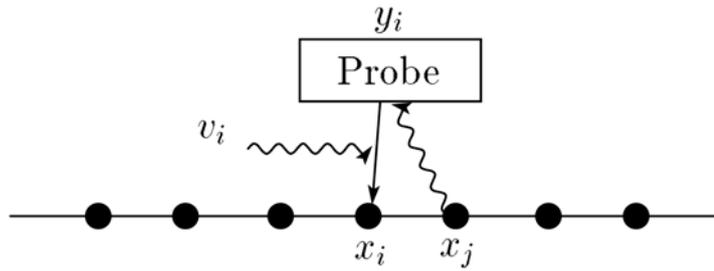


図 36: デバイスで x_i をひとつずつ読み出していき、右方向にスライドしていく。高密度にデータが書き込まれている状況下では、隣のサイトの情報 x_j からの干渉的な影響を受ける場合がある。

となる。指数関数の肩の部分を展開してみると、今度は以下のように 1 次元の強磁性 Ising 模型に最近接相互作用、及びランダム磁場がかかったものと対応する事が分かる。

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left(A\gamma \sum_{\langle ij \rangle} x_i x_j + \sum_{i=1}^N h_i x_i \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{N}{2\sigma^2} (A^2 + \gamma^2) \right\}. \quad (161)$$

ここで $h_i = Ay_i + \gamma y_j$ である。直感的にはノイズが入っただけの場合よりも原情報を正しく読み出しをすることができない事が想像できるが、前述の場合 (158) と比較して、隣接スピン間の相互作用によってサイト i のスピンの方向に影響が現れている事が見て取れる。ランダム磁場の中にも右隣の情報からの干渉の影響が現れている。そのため、正しく情報を読み出す、即ちスピンの向きをランダム磁場のなかにある y_i の方向に正しく固定するためには干渉の効果を低減する必要がある ($\gamma \ll 1$) 事が分かる。

6.2 2次元スピングラス模型との対応

それでは正しく情報を読み出すために一工夫を凝らしてみよう。つまり統計力学の観点から言えば、秩序相を持つように次元を大きくした模型を構成しようというわけである。勿論普通は逆の考え方をすべきで、ある情報の問題を表現した模型を統計力学的に扱ってどのような性質があるかを議論するのが真っ当である。しかしここで考えるように統計力学の模型から情報の構成法を提案する事も物語としては悪くないし、意味のあることだ。単純には 2 次元の Ising 模型であれば秩序相を持つ事が知られているのだから、それを念頭において情報の読み出し問題を構成してみよう。

6.2.1 2次元の干渉つき読み出し問題

今度は三角格子のサイトに情報を表す要素となる物理的な状態 x_i をおく事を考える。これまで同様に x_i はスピン変数であるとしよう。同じように局所的にデータを読み出す事を考えるが、情報の読み出し方法を図 37 にあるように 1 つのボンドの端点である格子点 2 つを利用して、それらの状態の積 $x_i x_j$ を読み出す状況を考える。この積の情報を全て知る事ができれば、もちろん格子点の情報 x_i をそれぞれ復元する事は可能である。それはボンドの本数に対して、サイトの数が

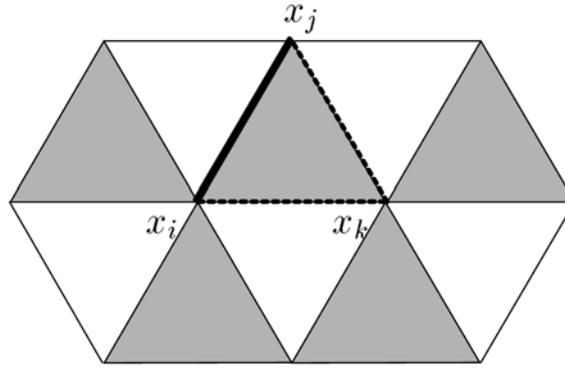


図 37: 三角格子状におかれた原情報 x_i . デバイスは上方向の各三角面で読み出しを $(ij), (jk), (ki)$ についてそれぞれ行う. その際にノイズは勿論のこと, 周囲の状況からの干渉を受ける.

少ないためだ. サイト 1 つの情報を表現するために, ボンドに情報の別表現を用意する. その数が多いという事は無駄を用意している事になる. しかしこうすることによって, もしもノイズに対する情報のロバストさが高まるのならば, こうした無駄も意味がない訳ではない. そのようにして情報に無駄を作ることを冗長化と呼び, 情報の表現方法によって情報に対するノイズやある種の誤りを除去するための工夫のひとつを誤り訂正符号と呼ぶ. こうしてできたボンド上におかれている情報を読み出し得られる情報 y_{ij} について考えてみよう. 添え字を (ij) としたのは読み出す情報は三角格子のあるボンドに注目して, その面に付随した図 37 のようなボンド 1 つの状態を読む事でデータの読み出しを行うためである. 同じようにノイズが乗ること, そして読み出しを行っている三角形にある他の 2 本のボンドの状況からの干渉の効果を考える.

$$y_{ij} = Ax_i x_j + v_{ij} + \gamma(x_j x_k + x_k x_i). \quad (162)$$

このように得られる情報 y_{ij} と読み出しを行ったボンドに書き込まれている状況表現する $x_i x_j$ の関係を書くことができる. これまでと同様に, Boltzmann 因子に対応する条件付確率 $\Pr(y|x)$ を書き下してみると,

$$\Pr(y|x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\text{all}} \{y_{ij} - Ax_i x_j - \gamma(x_j x_k + x_k x_i)\}^2 \right] \quad (163)$$

となる. 指数関数の肩の部分は三角形に付随する 3 本のボンドからの寄与全体を注意して勘定すると以下のように展開できる.

$$\Pr(y|x) \propto \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{\langle ij \rangle} R_{ij} x_i x_j \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\text{all}} y_{ij}^2 - \frac{N}{2\sigma^2} (A^2 + 2\gamma^2) \right\}. \quad (164)$$

これは三角格子上のランダムボンド型のスピングラス模型と対応している事がわかる. 相互作用のランダムさ R_{ij} は以下のように与えられる.

$$R_{ij} = Ay_{ij} + \gamma y_{jk} + \gamma y_{ki} - 2A\gamma - \gamma^2. \quad (165)$$

よく見てみるとあるボンド (ij) に関する相互作用は他のボンドに割り当てられた y_{jk}, y_{ki} にも影響されている. つまり相互作用 R_{ij} は, この意味で相関のあるランダムな相互作用をしているとい

う、新しいタイプのスピングラス模型である事が分かる。これはデータ読み出しのところで他のボンドからの干渉が影響するためである。もしもデータの読み出しの際の干渉を無視できるくらいに影響が小さい ($\gamma \ll 1$) とすると、 $R_{ij} = Ay_{ij}$ となり、独立なランダムさを持つ相互作用によるスピングラス模型に話を帰着させることができる。

上記の問題はあくまで情報の問題とスピングラス模型の関係性の例として、相互情報量がスピングラス模型の自由エネルギーと関連している事を紹介するに留めた。本解説記事ではここまでにすると、これらの問題に対してのスピングラス模型の双対変換が果たす役割を述べておこう。上記の問題から更にもう一步深入りすれば、スピングラス模型の相転移と**情報の推定**の確実性の関連性に注目して、原情報を正しく推定できるかどうかの境界として有限次元スピングラス模型の相境界を調べるという問題に行き着く⁸。有限次元スピングラスの問題となると、相転移が具体的にどこで起こるのかを定量的に定める系統的な手法は存在しなかったため、このような関係があったとしても数値計算で評価するしかなかっただろう⁹。しかしながら2次元のランダムボンド型のスピングラスであれば、これまでに紹介してきた双対変換による手法で¹⁰、相境界を非常に精度良く定める事が可能である [74]。こうなれば上記の問題を始め、実際の現場で必要とされる情報の推定問題の性能評価に取り組むことができる。物理の問題を離れて応用的な側面からも活躍をする事が垣間見える。物理の問題だと限ってみると、2次元の限定的なスピングラスの問題となってしまうが、このような応用にまで目を向けてみると様々な問題が存在する。ひとつ系統的な手法ができた場合、大きな広がりを見せる事こそ物理学における基礎研究の醍醐味ではなからうか。

7 有限次元スピングラスと量子情報誤り訂正符号

もうひとつ応用的な側面から有限次元スピングラスの問題を見てみよう。先ほどは情報の読み出しの問題において有限次元スピングラスの相転移の問題が、情報の推定技術の性能評価に繋がっている事をみた。また解説記事全体としては、スピングラス模型の、特に多重臨界点の位置を求める手法の話をこれまでしてきた。では話を戻して、多重臨界点の位置を求める事には、どのような意味があるのか。物理としてはスピングラス模型の相転移に関するひとつの限定的な問題にしか過ぎない。他の観点からも重要性があれば、それは面白い。そしてその関連性を見つめる事で、元々の問題の意義を解釈する事にも繋がるかもしれない。実はそれがある。先ほどの情報の読み出しの問題のように、量子情報という新しい分野における情報保存における誤り訂正符号と呼ばれる技術の性能評価という問題に直接結びついているのだ。このような事実はたいへん興味深いものとして、いかなる分野を研究している人間にも映るのではないだろうか。その問題のひとつとして多重臨界点の問題を再び挙げる。

最後の最後にもうひとつ大きな話が来ると疲れてしまうだろう。ここではあくまで文献 [75, 76] に沿った最小限の解説をしておく。しかしながら興味を多少なりとも持った読者はそれらの文献を更に深く読んでみてほしい。

⁸解析手法や対応関係等、ここで紹介したものとほとんど同じであるが、正確には違う事なのでここで明記しておく。相互情報量の特異性の場所を調べるという問題はこのままでも対処できるが、その特異性の意味するところや相についての情報理論からの意味づけ等ははっきりとしない問題である。ただ推定の問題であれば推定可能かどうかの境界がまさに相境界と対応している。

⁹実際2次元のランダム磁場 Ising 模型と上記のような干渉つきの読み出し問題を対応させて数値計算によりその性能評価を行った研究がある [73]。

¹⁰本解説記事では省いたが、三角格子の場合は星・三角変換 [26, 27] を導入する事で同様の解析 [34] を行う事が可能である。

7.1 量子情報と誤り訂正符号

量子情報とは、量子力学に現れるいくつかの性質を利用した情報処理を行う。これまでの古典的なデジタル情報（古典情報）とは異なり、重ね合わせや干渉などを利用するため、その計算範囲がより広いものであると考えられている。そのため量子状態を利用して情報を表現していく。古典情報におけるビット（0と1の2進数）に対応して、量子情報ではキュービットと呼ばれる情報単位を持ち、2つの状態をいわば同時に含む事が可能である。

$$|\Phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (166)$$

ここで a と b は複素数である。また基底として選んだ状態は $|0\rangle = {}^t(1, 0)$ と $|1\rangle = {}^t(0, 1)$ としている。しかしながら先ほど考えたようなデジタル情報（古典情報と呼ぶ事もある）では通信や計算処理や読み出しを行う時に雑音的にエラー（誤り）が生じる可能性がある一方、量子情報ではそれらだけではなく常に環境との相互作用の影響による誤りが発生する可能性がある。何もしなくても誤りが生じるという事だ。量子力学特有の現象、**デコヒーレンス**と呼ばれる現象である。このデコヒーレンスの影響を取り除くことが、量子情報においては必要不可欠となる。常に誤りが生じてしまうという事情を考えると、常に何らかの操作をして誤りを修復し続けなければならない事も想像できるだろう。

上で述べたように環境からの擾乱を受けて、その量子状態は常に変化をし続ける。その変化を表現する方法をまずは考えよう。量子状態には大きく分けて2種類の誤りが想定される。ひとつは**反転誤り**、もうひとつは**位相の誤り**である。具体的には、 $|0\rangle$ から $|1\rangle$ へと移るようなもの（その逆も含めて）を反転誤りと呼び、複素数の係数が変化してしまうものを位相誤りと呼ぶ。これらの誤りはPauli行列によって表現する事が出来る。反転誤りは σ_x で容易にあらわすことが出来る。例えば、 $|0\rangle$ という状態にあったキュービットに対して作用させると、

$$\sigma_x|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |0\rangle = |1\rangle \quad (167)$$

となり反転誤りを表現している事がわかる。また同様に位相誤りも σ_z によって表現する事が出来る。

先ほどの古典情報における例と同様に、量子情報においても、伝送したい、又は保存したい情報に誤りを訂正するための手がかりを付加する。冗長化である。この冗長化を利用して誤りを訂正できるようにする方法をやはり量子情報にも求めるべきで、量子情報誤り訂正符号と呼ばれる。この際に如何に工夫するかが重要なところである。

7.2 トーラス符号

量子情報を安定的に保つための誤り訂正符号のひとつであるトーラス符号と呼ばれるものを紹介しよう [75, 76]。このトーラス符号は、これまで扱ってきた $\pm J$ Ising 模型の相図の構造と非常に密接に関係している。先に言ってしまうと、トーラス符号の性能評価が $\pm J$ Ising 模型の相転移の解析を通して行う事が出来るのだ。

7.2.1 トーラス符号の構成

今回は簡単のため、位相誤りを訂正できるような符号化についてのみ考えていく。本質的には反転誤りに関しても同じように出来る。トーラス符号は、まず始めに量子状態を沢山用意して正

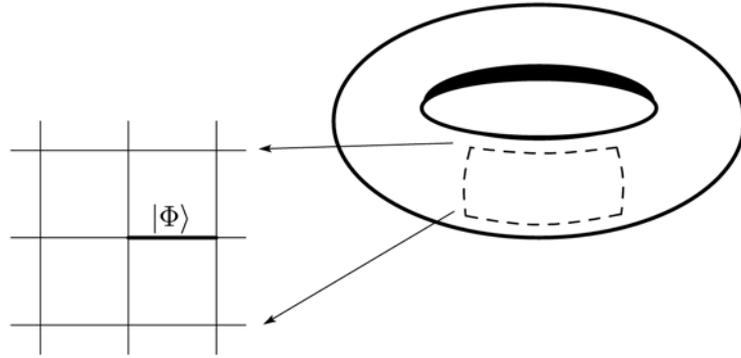


図 38: トーラス符号の構成法. 正方格子上的ボンダ上にキュービットを配列する. 縦方向横方向共に周期境界条件をとるため, トーラス符号と呼ぶ.

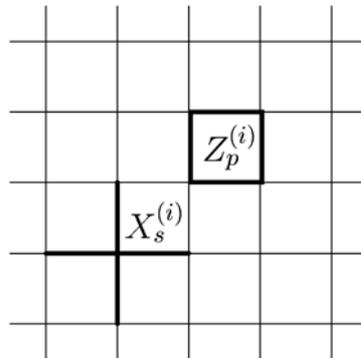


図 39: 符号化及び検査演算子 $X_s^{(i)}$ と $Z_p^{(i)}$ の作用の仕方.

方格子上的ボンダの部分においていく事を考える. これが丁度先に紹介した冗長化に相当している. トーラス符号という名前の由来ともなっているが, この正方格子には縦方向, 横方向共に周期境界条件を課す. (図 38) **正方格子全体の量子状態**でもって, いくつかの情報を保持するような符号化になっている.

まず以降で主役となる 2 つの演算子を紹介しよう. ひとつは $X_s^{(i)}$ は正方格子上で i 番目のサイトの周りを囲む 4 つのボンダの量子状態を反転させる操作を表す演算子である. (図 39) 具体的にはある格子点の周りがある 4 つのボンダにおける量子状態に対して σ_x を作用させる. またもうひとつの演算子として $Z_p^{(i)}$ を定義する. (図 39) これは正方格子上的正方形を指定して, それを囲む 4 つのボンダにおける量子状態に対して σ_z を作用させる. 実はこの 2 つの演算子が誤りを検査する演算子でもあり, $X_s^{(i)}$ は位相誤りを検出する役目があり, $Z_p^{(i)}$ は反転誤りを検出する役割がある. この両者の関係をここで考えると, 十字架状に作用する $X_s^{(i)}$ は正方形状に作用する $Z_p^{(i)}$ との間で, 作用するボンダは重なったとしても 2 本である. よってその重なった部分で Pauli 行列の反交換関係を適用すれば, $[X_s^{(i)}, Z_p^{(j)}] = 0$ である事が分かる. 重ならない場合に関してはこの交換関係は自明に成立するので, 任意の格子点, 正方形への作用に対して, $[X_s^{(i)}, Z_p^{(j)}] = 0$ である. よってふたつの検査演算は同時固有状態を持つ事がわかる. この固有状態を $|\Psi_0\rangle$ と書き, トーラス符号の方法で情報を表現する 1 つの量子状態であるとする. さてそこからトーラスという性質を用い

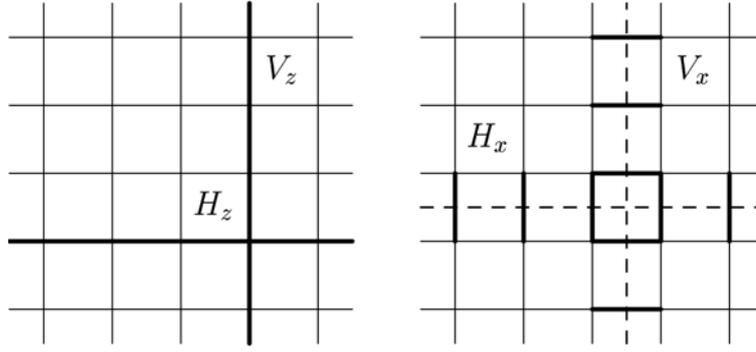


図 40: 符号化演算子 H_i と V_i ($i = x, z$) の作用のさせ方.

て、他にも論理演算子 H_z , V_z , H_x , V_x の作用によって以下のような異なる量子状態を設計する.

$$|\Psi(k, l, m, n)\rangle = H_x^k V_x^l H_z^m V_z^n |\Psi_0\rangle. \quad (168)$$

ここで (k, l, m, n) は作用の有無を表す整数の組でそれぞれ 0, 1 を取る. よって合計で 16 状態の量子状態を設計した事になる. また V_z と H_z はそれぞれ縦方向に対して任意の 1 列, 横方向に対して任意の 1 行に対して全てに σ_z を作用させる操作である. (図 40) そして V_x と H_x はそれぞれ縦方向に対して任意の 1 列, 横方向に対して任意の 1 行に対して全てに σ_x を作用させる操作である. 但し作用させる時には双対な格子を想定して作用させる事に注意したい. (図 40) これはトーラス上の幾何学の特徴を表しているところであるが, ぐるっとトーラスを巻いたように作用していることが重要である¹¹. これらの異なる量子状態 $|\Psi(k, l, m, n)\rangle$ もまた検査演算子の固有状態であることは即座に示す事が出来る. さて 16 個の異なる量子状態 $|\Psi(k, l, m, n)\rangle$ の線形結合を考える事で, 1 つの量子状態として扱う事を考える. 即ち 4 キュービットの情報とする.

$$|\Psi\rangle = \sum_{k, l, m, n} |\Psi(k, l, m, n)\rangle. \quad (169)$$

正方格子のボンドは N_B と莫大な大きさを持つのに対して, 構成できるのは 4 キュービットだけなので相当な冗長量である. しかしながらこのデメリットを越えたメリットが, このトーラス符号にはある. このトーラス符号においては, 各ボンドにおける量子状態がそれぞれ誤りを引き起こす. この誤りの確率があまりに大きくなると誤り訂正が出来なくなる. ではその誤りの確率はどれくらいであれば, よいのだろうか? その確率が有限の値を持ち, しかも実装した場合に想定できるレベルの誤り確率であることが望ましい. トーラス符号はその願いをまさになんてくれる, 量子情報の誤り訂正技術の中でも極めて稀な例なのだ. しかもスピングラス模型と対応させる事が出来るという意味でも, 解析や理解をしやすい符号であるといえる.

7.2.2 誤りと検査演算

次の段階はその誤りを検出する方法である. その検出操作の結果, トーラス符号で表現される情報を壊してはいけない. 実は先ほど定義した 2 つの演算子 $X_s^{(i)}$, $Z_p^{(i)}$ が検査演算子である.

¹¹ トーラスの形状を変えれば, その分論理演算子の種類が増す. そのため含ませられる情報量が増大する事は指摘しておく. そのため最大限 4 キュービットという訳ではない. いくらかの工夫の余地がある.

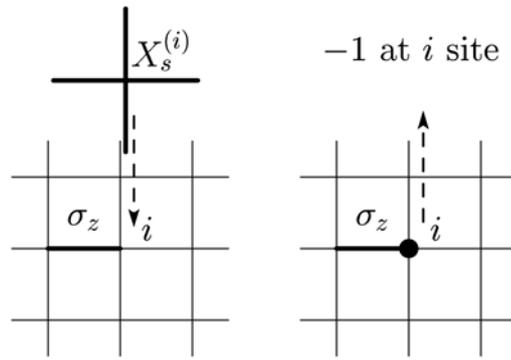


図 41: 反転誤りとその検出. 検査演算の結果 -1 が帰ってきた場合, 黒丸を付しておく.

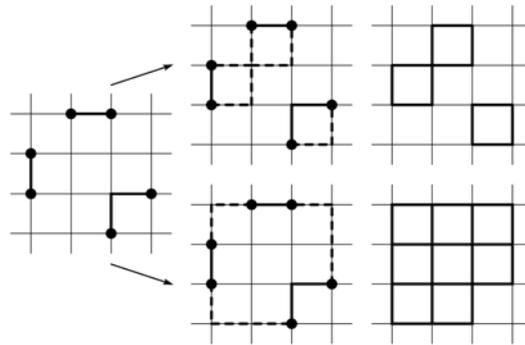


図 42: (左側) 検査演算を全サイトに関して行った時に得られる模様. 検査演算の結果 -1 が帰ってきた場合に黒丸を付しておく. (真ん中) 推定して破線のように -1 が生じているサイト同士を結ぶ. 推定なのでいくつかの可能性が当然ある. (右側) 推定して結んだ経路に沿って σ_z を作用させる (修正演算). その結果, 修正演算と元から生じている誤りによる作用が, 検査演算子 $Z_p^{(i)}$ の組み合わせで記述される作用に切り替わる.

7.2.3 誤り検出とその修正

肝心の誤りの検出はどのように行われるかを見てみよう. 簡単のため, 位相誤り σ_z が生じた場合を考える. 図 41 のように位相誤り σ_z が生じた場合を考える. 反転誤りを検出するのは検査演算 $X_s^{(i)}$ の役目である. この検査演算は常に正方格子全体に行われている. 図 41 のように反転誤りが生じている場合, 検査演算の結果として反転誤りが生じているボンドの隣接する正方形では以下のような計算により, -1 という値を出す.

$$X_s^{(i)} \sigma_z |\Psi(k, l, m, n)\rangle = -\sigma_z X_s^{(i)} |\Psi(k, l, m, n)\rangle = -|\Psi(k, l, m, n)\rangle. \quad (170)$$

これは純粋に Pauli 行列の反交換関係から示す事が出来る. 一方で, 上記の検査演算子によって我々が手にすることの出来る情報はこれだけである. つまり検査演算の結果, 図 42 にあるような模様が見つかるだけである. これを量子状態における **シンδροーム** と呼ぶ. それを元にして量子誤り訂正を考えなければならない. 素朴には検査演算の結果, 図 42 にあるようなシンδροームが与えられた正方形の間に誤りがある事が考えられる. 検査演算の結果, シンδροームが生じたサ

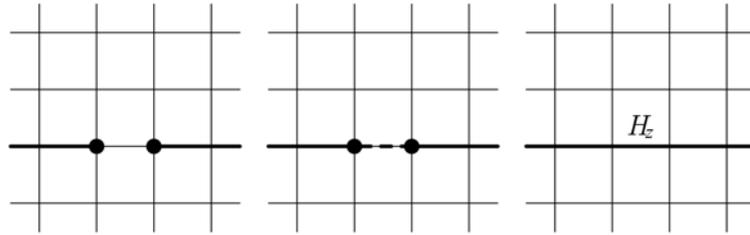


図 43: 周期境界に渡って繋がった誤りが生じた場合の検査演算結果. (真ん中) 最短距離で結ぶ推定法による修正演算. (右側) その修正演算によってもたらされる量子状態への作用.

イト同士を適当に推定して結ぶ事を考えてみよう. ひとつ系統的な手法として, 例えばシンδροームが生じたところ同士を最短距離で結ぶなどがあるだろう. そのようにして結んだ径路に沿って, 誤りと同じ種類の演算を作用させる. 例えば位相誤りの場合は, σ_z を径路に沿って作用させる. これが実は修正演算になっている. (図 42) すると量子状態に自然に生じた誤りと, 修正演算で生じた効果両者により $Z_p^{(i)}$ という演算と同じ効果が生まれている事に気づく. 他の結び方にしても実は同様に検査演算 $Z_p^{(i)}$ の演算の組み合わせで表現できる事に気づく. (図 42) 検査演算 $Z_p^{(i)}$ はいくつ作用させてもトーラス符号上の量子状態を変化させないので, 誤りを綺麗に取り除く事が出来たことになる. これは図形的表現で言えば, 元々の誤りと修正演算によって閉ループが出来る事が分かるだろう. 推定した径路が異なっても高々閉ループの形状をトーラスの上で変化させたに過ぎないという事になる. その場合ループがどんなに大きくても変形を繰り返せば小さく出来る事を意味している. つまりどんな推定であってもよいから, 閉ループを構成しなさいというのが修正の基礎となる事がわかる. そしてトーラス符号の巧妙なところは, 検査演算の作用がこの閉ループの変形に対応しているところである. 検査演算子をあらゆるところに常に作用させる事で状態を安定的に保とうとする. その際にシンδροームから修正演算を絶えず行う. その後検査演算子の作用によって閉ループは絶えず変形を繰り返している. この閉ループの形状に特異な事がおきる時, 修正が失敗してしまう事が予想されるだろう.

7.2.4 修正限界の登場

トーラス上の正方格子におけるボンド上に誤りが生じる確率が大きくなると, その修正演算が不可能な場合がやがて現れる. 誤りが生じる確率を p_q とすれば, 当然ながらその値が大きい時にそのような問題に直面するだろう. トーラスを巻く程に長い位相誤りが連続した状態に対して, 検査演算を施した状況を考える. (図 43) この場合に安直にシンδροームが生じた点同士を結ぶように修正演算を施すと, トーラスを巻くように σ_z が作用する状態となる. 修正演算前は量子状態 $|\Psi\rangle$ に誤りが乗っただけの状態であったに対して, 修正演算後には $H_z|\Psi\rangle$ と変化してしまった. つまり量子状態を構成している $|\Psi(k, l, m, n)\rangle$ が $|\Psi(k, l, m + 1, n)\rangle$ へとシフトしてしまった事を, 図の状況は表している. 異なる量子状態へと変化してしまったため, 誤り訂正が失敗してしまった事になる. これは修正演算によって閉ループを作っているものの, トーラスを巻いてしまっているからどんなに変形しても小さい形へと押し込めない事がわかる. どんなに小さくしてもトーラスを巻くような直線, ちょうど論理演算子のような作用の形にしかたないのである. このことを図形的には閉ループのホモロジーのクラスが変化したという. この様な限界が誤り確率 p_q がいくつのときに訪れるかを評価すること, これが誤り訂正符号の性能評価という問題である. 実

用を考える場合の尺度を与える意味で重要な問題である。

ここまでは主に位相誤りについて考えてきた。それに対する検査演算は $X_s^{(i)}$ であった。その場合誤りが非常に大きくなると、修正演算後に符号化の時に利用した H_z や同様に V_z がトーラス符号の量子状態に作用してしまうことで誤り訂正が失敗する事になる。

冗長化が過ぎると解説記事として情報として何も伝えなくなってしまうので、これ以上の詳細な説明は省くが、反転誤りに関しても同様である。その場合に利用する検査演算は $Z_p^{(i)}$ を用いる。符号化も修正演算もそれに応じて同じように行う事が出来る。

7.3 トーラス符号での修正限界

ではその性能評価の問題を実際に行うための定式化を行っていこう。トーラス符号上の誤りの集合を E として表記する。そして検査演算結果から修正演算を施すために推定した径路を E' として表そう。我々がトーラス上の量子情報から誤りを綺麗に取り去るために、行わなければならない修正演算は E' に対して σ_z を適用する事である。その修正演算の結果できるループの形状を $D = E + E'$ と書く。その集合 $D = E + E'$ がトーラスをぐるりと回るようなものであつては困る。我々が行う事の出来る修正演算は $Z_p^{(i)}$ であるから、高々正方形を組み合わせてできるような閉ループ形状（これを C と書く）のものだけなのだ。

7.3.1 修正限界評価

修正演算を行う際に検査演算によって -1 が生じた点（シンδροーム）同士を結ぶ推定方法には選択の余地がある。無理のない推定の範囲には限られるものの、様々な推定径路 E' によって修正をしたとしても修正が可能であるような状況を考える。誤り E が与えられた時、その発生確率は、

$$P(E) = p_q^{|E|} (1 - p_q)^{N_B - |E|} \quad (171)$$

で与えられる。するとこの誤りに対して、閉ループ形状を作るような推定を行う。検査演算によってこの閉ループは形状を常に変化させ続ける。その時あらゆる変化を考慮した上で発現するような $E' = E + D$ の全発生確率は

$$P(E') = \sum_{D \in C} P(E + D) \quad (172)$$

で与えられる。この様々な推定の結果、いくつかあるホモロジークラスのうち、元々のホモロジーのクラスに戻る確率は以下のように与える事が出来る。

$$\frac{P(E')}{\sum_{D_i} P(E' + D_i)} \quad (173)$$

ここで D_i はトーラスをぐるりと回るループを表しており、ホモロジーのクラスを分類している。例えば今回の場合は、 D_0 は空集合としてループがない場合を表し、 D_1, D_2 はそれぞれ縦方向横方向にぐるっとトーラスを回るようなループを表して、 $D_3 = D_1 + D_2$ である。よって同じホモロジーのクラスに入れば修正は失敗しないのだから、トーラスの大きさを非常に多くすることで冗長化を大きく取る事で、以下の関係式が成立すればよい。

$$P_{\text{suc.}}(p_q) = \frac{P(E')}{\sum_{D_i} P(E' + D_i)} \rightarrow 1. \quad (174)$$

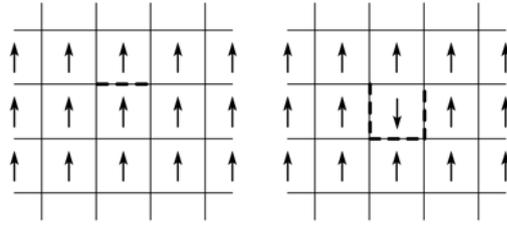


図 44: 誤り（相互作用の分布）と修正演算（スピンの向き反転）の対応. 破線が σ_z の作用している部分を表す.

あとはこれを解析的に評価する事が出来ればよい. 上記のような模型を具体的に評価するために, 統計力学の処方箋を利用しようというのが作戦である. トーラスを大きくするというのは, 統計力学における熱力学的極限に相当している. 技術的にはキュービットを多く必要とするこのトーラス符号の大規模化はまだまだ実現には近いとは言いがたい. しかしながら理論的に非常に興味深い対象があるのだから, 先んじてこの問題に対して解答を用意しておく事は決して無駄ではない.

7.3.2 スピングラス表現

具体的な性能評価を与えるために, トーラス符号における誤り訂正をスピングラス模型の言葉に翻訳していく. トーラス符号全体に及ぶ誤り確率 $P(E)$ は, $\pm J$ Ising 模型の強磁性, 反強磁性相互作用の分布の表現と以下のように同じにする.

$$P(E) = p_q^{|E|} (1 - p_q)^{N_B - |E|} = \prod_{\langle ij \rangle} \frac{e^{K_p \tau_{ij}}}{2 \cosh K_p} \quad (175)$$

とかける. τ_{ij} がどこに誤りがあるかを表す. 誤りがある場合 $\tau_{ij} = -1$, ない場合に対しては $\tau_{ij} = +1$ を対応させる. ここで $p_q / (1 - p_q) = \exp(-2K_p)$ としている. 誤り確率 p_q と強磁性相互作用の発生確率 p と対応が反転している事 ($p_q = 1 - p$) に注意して欲しい.

さてこのように誤りを相互作用の分布に置き換えると次なる対応はスピン自由度である. これは検査演算 $Z_p^{(i)}$ による閉ループの変形に対応している. 検査演算は正方形部分だけに σ_z を作用させる. そのため誤りの部分は元に戻されて, 何もなかったところには誤りが付加される格好となる. これは正方形にスピンをおき, そのスピンを反転させたときの状況と対応させる事が出来る. (図 44) 検査演算の作用がスピンの向きに対応するのだ. つまり検査演算をあらゆる正方形に対して適用するという事は, 全ての正方形にスピンを乗せておき, そのスピンの配位についての和を考えればよい. よって以下の対応関係を得ることが出来る.

$$P(E') = \sum_{D \in C} P(E + D) = \frac{1}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K_p \tau_{ij} S_i S_j} \propto Z(K_p; \{\tau_{ij}\}). \quad (176)$$

この対応を使うと, 典型的なパターンに対する修正成功確率は,

$$\frac{P(E')}{\sum_{D_i} P(E' + D_i)} = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{Z_i(K_p, \{\tau_{ij}\})}{Z(K_p, \{\tau_{ij}\})} \right)^{-1} \quad (177)$$

と書ける．ここで定義した新しい種類の分配関数は， $P(E' + D_i)$ に対応して $Z_i(K_p, \{\tau_{ij}\})$ は同じ $\{\tau_{ij}\}$ の分布に対して，トーラスをぐるっと回るような $\tau_{ij} = -1$ を追加した場合の分配関数である．さてここに現れた分配関数の比は物理量の観点からは自由エネルギーの差と対応している．

$$\Delta_i = -\beta F_i(K_p, \{\tau_{ij}\}) + \beta F(K_p, \{\tau_{ij}\}) = \log \left(\frac{Z_i(K_p, \{\tau_{ij}\})}{Z(K_p, \{\tau_{ij}\})} \right). \quad (178)$$

あとはこの自由エネルギーを評価する事が出来ればよい．この自由エネルギーの差と誤り訂正が成功する確率のとの関係についてもう少し考えてみよう． $\exp(\Delta_i) \rightarrow 0$ となることで $P_{\text{succ.}} \rightarrow 1$ になる一方， $\exp(\Delta_i) \rightarrow 1$ となることで $P_{\text{succ.}} \rightarrow 1/4$ となる¹²．あるしきい値を境目に自由エネルギーの性質がまるで異なるというわけである．これは安直には特異性が生じた事を示唆している．もう少し噛み砕いて言えば，反強磁性相互作用が多くある場合，スピンの反転している領域が系全体に及ぶようになったことを示す．つまり熱力学的極限において，スピンの向きを上向きにそろえようとするには，境界の長さにも及ぶエネルギーが必要であるため無視できない事を表す．自由エネルギーの自己平均性を用いて，その配位平均で自由エネルギーを評価する事にすればこれまでに説明してきた $\pm J$ Ising 模型の統計力学へ再び話が戻る．上記の考察の結果として，トーラス符号の誤り訂正限界は $\pm J$ Ising 模型の西森線上 ($K = K_p$) の相転移点，即ち多重臨界点で表される事が分かる．

これまでに紹介してきた多重臨界点の結果がそのままトーラス符号の誤り訂正限界の評価へと直接繋がる．これまでの結果を利用すれば，例えば正方格子の場合は $p_q = 1 - p_c \approx 0.1092$ 程度である．今回の例では正方格子の場合について取り上げたが，もちろん他の格子に量子状態を乗せて構成するトーラス符号も考えられる．三角格子の場合は $p_q = 1 - p_c \approx 0.1640$ 程度であり，正方格子の場合よりも誤り確率が大きい場合でも誤り訂正が可能である．つまり比較的強固な誤り訂正符号である事が結論付けられる．

最近ではトーラス符号を発展させたカラー符号というものも登場している [77, 78]．詳細はここでは述べないが，やはりスピングラス模型の多重臨界点とカラー符号の訂正限界が対応する事が知られている．カラー符号の方が，扱える量子計算の種類が豊富であるため，トーラス符号よりも発展的な興味の意味で注目を集めている．カラー符号における誤りの修正限界も再びスピングラス模型の自由エネルギーの特異性と再び一致する．但しこの場合の対応するスピングラス模型は，3体相互作用をする特殊な模型である．符号を構成する量子状態は三角格子上，もしくはユニオンジャック格子上の三角形の上に乗せる．その量子状態に生じる位相誤り，反転誤りを確率 p_q とすると再び $\pm J$ Ising 模型に対応させる事が出来る．しかし相互作用は3体相互作用をするもので，ハミルトニアンは以下のように表される．

$$H = -J \sum_{ijk} \tau_{ijk} S_i S_j S_k. \quad (179)$$

ここで和は格子上の全ての三角形で取る．この模型も離散フーリエ変換を施す事で，再び三角格子，ユニオンジャック格子の模型へとそれぞれ変換することが出来る．これまでに解説してきた双対変換によるスピングラス模型の解析手法で，多重臨界点の位置を極めて正確に計算する事ができる [79]．その多重臨界点の位置が，カラー符号においても誤り訂正限界を表す．三角格子の場合 $p_q = 1 - p_c \approx 0.1096 - 8$ であり，ユニオンジャック格子の場合は $p_q = 1 - p_c \approx 0.1092 - 3$ と見積もられる．

¹²成功確率は0とはならない．それはあくまで修正に失敗した量子状態の波動関数の係数は変わっておらず，基底となる $|\Psi(k, l, m, n)\rangle$ (特に m, n の変化) がシフトしただけに過ぎないからである．成功確率が $1/4$ なのは，そのシフトのありえる可能性が4通りであることからくる．

7.4 最後に

最後に突拍子もないかのような、量子情報における誤り訂正符号問題とスピングラス模型との関連について付け加えた。解説記事としては、スピングラス模型の多重臨界点が解析できますよ、それだけでもよかったのかもしれない。しかしながら、以下に述べる解説記事の経緯にその理由がある。筆者が卒業研究の題材として取り組んだのが、実はトーラス符号の誤り訂正符号の問題であった。当時は解析的な手法については不勉強で、専ら数値計算によって創造的というよりもどちらかという直接的な作業に追われていた事を覚えている。その中である独特なアルゴリズムを習得する機会があり、その日本語による解説記事を物性研究に書いてみないかと打診されたことがある。結局流れてしまって、回りまわって今こうして物性研究において、本解説記事を書いているのだが、その卒業研究に関しては、正直何も出来なかったに等しい。しかし本解説記事の半分を占めている修士論文研究、博士論文に関連する研究内容に関しては自信を持って、世に知らしめたいと願っていた。これまでの蓄積をこの物性研究の解説記事として執筆できる機会を再び得られたのは、本当に喜びと驚きで感動しきりである。

上記のようなこうした流れがあり、自分のこれまでの歴史そのものを振り返るきっかけにもなるし、詰め込んだ方が解説記事以上の意味を持つかもしれない。そう考えて、駆け足の解説ではあるものの、最後に誤り訂正符号の問題を是非とも付け加えたかった。読みにくい構成になってしまって読者の皆様には申し訳ない気持ちで一杯であるが、わがままを許していただきたい。しかし實際上、今日においても量子情報理論はその進展が目覚ましい分野である。再びこの問題から有限次元スピングラスの問題を眺めなおす時期が来ているのかもしれない。

8 まとめと今後の展望

本解説記事では、有限次元スピングラス模型に対する新しい解析手法として、繰り込み（部分和）を利用した双対変換を紹介してきた。前半部分では、双対変換をそのままスピングラス模型に適用した場合の問題点を指摘して、妥当性を検証してきた。後半部分では、いくつかの問題点を考慮して改善方法を模索する中で、どのように繰り込みを利用した解析に着想できたかを感じてもらえるように記述した。双対変換の重要な部分は、温度の変換を見出す事である。しかしながら、双対変換をそのままスピングラス模型に適用すると、温度の対応関係が複雑となりそこで新しい考え方が必要となるというのが直観的な説明であろう。その温度の関係を、これまで扱われた場合と同様なものへと正常化させるのが繰り込み群による解析の効果である。即ち転移点は繰り込み群の観点からも、双対変換の観点からも、固定点でなければならないのだ。この事実がスピングラス模型において、単純な双対変換による解析を難しくしている。

これまで解説してきた新しい解析手法により、以下にあげるいくつかの素朴な結果を得ることができることを示した。西森線上での多重臨界点の位置、スピングラス相の存在の可能性について、そして相境界の傾きの厳密解である。素朴な、というのは結果の素朴さではなく、素朴な応用による結果という意味で称している。結果の非自明さについては読者と共有できるところではないだろうか。相転移の議論を行う上で欠かせない基本的な問題として、相転移点の位置に関連した話題は双対変換の範囲では彫りつくしたように思われる。特に副題とした、厳密解を求めて、という部分は相境界の傾きに関しては少なくとも到達しているといえる。それではスピングラス模型の双対変換の次なる方向性はどこにあるのだろう。全てを詳細にここで披露するのは勿論控えるが、いくつかの方向性を提示しておこう。スピングラスに限らず、双対変換それ自体の適用範囲は完全なものではない。もう少し広いクラスの模型に対して適用可能ではないか、と模索する方向性がひとつあるだろう。そして高次元の模型への拡張である。これに関しては現時点では、双対変換により異なる模型間の関係性を見出せるところまでは確立している。この性質を利用して2次元のスピングラス模型を超えて、3次元などのより現実の物質や実験に繋がる解析を行うというのが野望として芽生えるだろう。私もその挑戦者の一人である。

またこれまでスピングラス模型の解析というと、特に有限次元の場合、業界全体として鬼門のように感じられてきた。最近になっても平均場理論を駆使したスピングラスの更なる理解や考察、及び関連する分野への平均場理論の応用などが盛んに行われている。特に熱平均と配位平均のように2重の平均が必要な問題に対する強力な手法として、スピングラスの理論は他の分野、特に情報理論の分野などへの応用が進んできた。またその発展方向が一分野を築くまでに至っているのも事実である。従来型の平均場理論に基づく話題はそれはそれで面白いのだろうが、あくまで平均場の範疇なのだ。まず物理学の観点からは、多少現実的であったり想像のしやすい有限次元という舞台上、何も出来ないままでは困る。2次元のスピングラス模型という最も素朴な舞台ではあるものの、双対変換というひとつの解析的な手法が少なくとも確立したのだ。驚くべき事に、それは古くより知られる統計力学の手法である、双対変換を基礎とするものであった。今後こういった既存の手法を拡張することによって、有限次元のスピングラス模型の難しい問題に立ち向かう事ができるという場面が出てくるかもしれない。そしてここで紹介したスピングラス模型の双対変換は、やはり2重の平均の問題を難しい計算なしで解析する手法ともいえる。本解説記事で簡単に紹介した情報の読み出しの問題や量子情報における誤り訂正符号の問題など、有限次元スピングラスと対応する他の分野の問題がまだまだ眠っているはずだ。

誰も手出しが出来ない難題を、少しずつではあるが解決へ向かって進展していく。この積み重ねがいつかは大きな発展へと近づく一歩である事を願って、筆をおく。

付録 A ゲージ変換による物理量の評価

西森線上でゲージ変換を用いた解析手法をもう少しここでは紹介しておこう。ゲージ不変な物理量を Q とする。例えばハミルトニアン (2) などがそれにあたる。具体的な例として、これまで手馴れた $\pm J$ Ising 模型を例として考える。そのようなゲージ不変な量の熱平均、及び配位平均をまず考えてみよう。

$$[\langle Q \rangle]_{\text{av}} = \sum_{\{\tau\}} \prod_{\langle ij \rangle} \frac{e^{K_p \tau_{ij}}}{2 \cosh K_p} \frac{1}{Z(K; \{\tau\})} \sum_{\{S_i\}} Q \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j}. \quad (180)$$

ここでゲージ変換を考えてみよう。ゲージ変換を行うと、 $e^{K_p \tau_{ij}} / 2 \cosh K_p$ が $e^{K_p \tau_{ij} \sigma_i \sigma_j} / 2 \cosh K_p$ のように変化する。つまるところ、ゲージ変換は配位平均による和を取る順番を入れ替えるに過ぎない。そのため $\{\sigma_i\}$ をどのような組み合わせで選んだとしても、 $[\langle Q \rangle]_{\text{av}}$ の値に変化は生じない。そこで両辺同時に $\{\sigma_i\}$ のあらゆる組み合わせについて和を取ってみよう。左辺は上記の理由から $2^{N_s} [\langle Q \rangle]_{\text{av}}$ となる。一方の右辺については分布関数が増えた事に注意すると、以下のように計算する事が出来る。

$$\begin{aligned} [\langle Q \rangle]_{\text{av}} &= \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K_p)^{N_B}} \\ &\quad \times \sum_{\{J_{ij}\}} \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K_p \tau_{ij} \sigma_i \sigma_j} \frac{1}{Z(K; \{\tau\})} \sum_{\{S_i\}} Q \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j} \\ &= \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K_p)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{Z(K_p; \{\tau\})}{Z(K; \{\tau\})} \sum_{\{S_i\}} Q \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j}. \end{aligned} \quad (181)$$

ここで西森線の条件 $K = K_p$ を課す。すると右辺にある分配関数の比の部分、 $Z(K)/Z(K_p)$ が 1 となる。そのためゲージ不変な量に関して、分配関数の部分が消える事を利用した解析を行うことができる。

具体的な例としてハミルトニアンを考えてみる。

$$\begin{aligned} [\langle H \rangle]_{\text{av}} &= \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \sum_{\{S_i\}} \left(- \sum_{\langle ij \rangle} \tau_{ij} S_i S_j \right) \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j} \\ &= - \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K)^{N_B}} \frac{d}{dK} \sum_{\{S_i\}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j} \\ &= -N_B \tanh K. \end{aligned} \quad (182)$$

ここで K は逆温度と同様にして扱っている。即ち $J = 1$ であるとする。この計算は、物理量のゲージ対称性と、分布関数のゲージ変換による変化を利用したものである。格子や次元の特徴を使った部分は全くない事に注意してもらいたい。即ち非常に広く強い結果である。

同様な解析手法により、比熱の上限についても評価する事が出来る。比熱は以下のように与える事が出来る。

$$\begin{aligned} T^2 C &= - \frac{\partial}{\partial K} [\langle H \rangle]_{\text{av}} \\ &= [\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2]_{\text{av}}. \end{aligned} \quad (183)$$

第一項については、ゲージ変換による分配関数のキャンセルを利用する。

$$\begin{aligned}
[\langle H^2 \rangle]_{\text{av}} &= \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K)^{N_B}} \sum_{\{\tau_{ij}\}} \sum_{\{S_i\}} \left(- \sum_{\langle ij \rangle} \tau_{ij} S_i S_j \right)^2 \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j} \\
&= \frac{1}{2^{N_s} (2 \cosh K)^{N_B}} \frac{d^2}{dK^2} \sum_{\{S_i\}} \sum_{\{J_{ij}\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \tau_{ij} S_i S_j} \\
&= \left(N_B^2 \tanh K + N_B \frac{1}{\cosh^2 K} \right). \tag{184}
\end{aligned}$$

但し式 (183) の第二項に関しては、ゲージ変換を利用したとしても分配関数の項が完全に消える訳ではない。そのため厳密な計算は行えない。しかしながら Schwarz の不等式を離床して以下のように下限を求める事が出来る。

$$[\langle H \rangle^2]_{\text{av}} \geq [\langle H \rangle]_{\text{av}}^2 = N_B^2 \tanh^2 K. \tag{185}$$

式 (184) と式 (185) をあわせれば、比熱の上限を得る事が出来る。

$$T^2 C \leq N_B \frac{1}{\cosh^2 K}. \tag{186}$$

付録 B 双対変換によるエネルギーの厳密な解析

双対変換は、異なる温度に対する分配関数同士を結びつけることができる。例えば式 (36) のように、その関係は与えられる。両辺で対数を取れば自由エネルギーの関係式を得る事が出来る。そこで式 (36) の両辺を対数及び逆温度微分を取り、エネルギーの関係式を考えてみる。

$$\left. \frac{d}{dK} \log Z(K) \right|_K = \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dK} + \left. \frac{d}{dK} \log Z(K) \right|_{K=D(K)} \frac{dD(K)}{dK}. \tag{187}$$

ここで双対変換の固定点という条件 $K_c = D(K_c)$ を課してみよう。内部エネルギーが双対変換の固定点上で連続であれば、以下のように固定点上の内部エネルギーの関係式を得る事が出来る。

$$E(K_c) = - \left. \frac{d}{dK} \log Z(K) \right|_{K_c} = - \left(1 - \left. \frac{dD(K)}{dK} \right|_{K_c} \right)^{-1} \left. \frac{d\Lambda}{dK} \right|_{K_c}. \tag{188}$$

ここで双対変換の固定点上では、 $\Lambda = 1$ であるという性質を利用した。もしも内部エネルギーが固定点上で連続ではない、一次転移のような場合は高温側と低温側での内部エネルギーの平均値を求める事が出来る。例えば、 $q \geq 4$ の Potts 模型などがその場合に当てはまる。いずれにせよ、双対変換による分配関数の関係式は何も相転移点を導くだけではないのだ。

さらに逆温度微分を重ねて行えば、比熱の関係を再び導く事が出来る。具体的には式 (187) から、固定点上での比熱の振る舞いが連続となるかそうではないかを推定する事が出来る。内部エネルギーの関係式 (187) に対して逆温度微分を考える。

$$-\frac{C(K)}{K^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{d\Lambda}{dK} \right)^2 - \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{dK^2} - \frac{C(D(K))}{D(K)^2} + E(D(K)) \frac{d^2D(K)}{dK^2}. \tag{189}$$

ここで双対変換の固定点付近での比熱の振る舞いを調べるために、 $K = K_c + \delta$ 及び $D(K) = K_c - \delta$ として $\delta (\ll 1)$ に関する展開を考える。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{K_c^2} \{C(K_c + \delta) - C(K_c - \delta)\} \\
 & = \left(\frac{d\Lambda}{dK} \Big|_{K_c} \right)^2 - \frac{d^2\Lambda}{dK^2} \Big|_{K_c} - \left(1 - \frac{dD(K)}{dK} \Big|_{K_c} \right)^{-1} \frac{d\Lambda}{dK} \Big|_{K_c} \frac{d^2D(K)}{dK^2} \Big|_{K_c}. \quad (190)
 \end{aligned}$$

右辺の量を評価して 0 となる場合、比熱は発散もしくは連続であるという結論を導く事が出来る。一方、右辺の値が 0 とならない場合、比熱は不連続となる事がわかる。このように双対変換で得られた分配関数の関係は非常に重要な結果を、比較的簡単に計算する事が出来る。その意味で非常に重要である。特に多くの統計力学のモデルは、厳密な計算を行うのが非常に難しい。その難しさを回避して、解析を行う事が出来る。

謝辞

物性研究各地編集委員である笹本智弘氏（千葉大学）にこの記事を書く事を勧めていただいた。思えば私の卒業研究時にも物性研究の記事の依頼を、おそらく半ば冗談でもありながら、氏からは頂いた記憶がある。その誘いに触発されて頑張って、ある意味ここまで到達することが出来たのだと思う。私の中では一種の憧れとなっていたこの物性研究に、これまでの成果をまとめあげる機会を回りまわって得られたのは、なんとなく感慨深いものです。本当にありがとうございます。またこれまでの研究の礎を作り上げて、自由な形式で枠にとらわれない研究を指導及び奨励して、見守ってくださった指導教官である西森秀稔先生（東京工業大学）にも改めて、この場を借りて感謝の辞を述べたいと思います。そして双対変換と情報理論の関連研究についての提案や議論を、新天地に赴いてまもなくにさせていただいた田中利幸先生（京都大学）にも感謝したい。

多重臨界点理論に関連する論文

- スピングラス模型の双対変換の性質については以下の論文が詳しい。
“Duality in spin glasses”
Hidetoshi Nishimori, *J. Stat. Phys.* **126** (2007) 977.
- 最近の成果も含めた概要的な内容を掴むには以下の論文が適当である。
“Multicritical point of spin glasses”
Hidetoshi Nishimori and Masayuki Ohzeki, *Physica A* (2010) in press,
doi:10.1016/j.physa.2010.01.025.
- スピングラス模型にそのまま双対変換を適用した解析は以下の論文が詳しい。
“Symmetry, complexity and multicritical point of the two-dimensional spin glass”
Jean-Marie. Maillard, Koji Nemoto and Hidetoshi Nishimori,
J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 9799.
- 繰り込みと双対変換をあわせた解析について初めて言及したのが以下の論文である。
“Multicritical points for the spin glass models on hierarchical lattices”
Masayuki Ohzeki, Hidetoshi Nishimori and A. Nihat Berker,
Phys. Rev. E **77** (2008) 061116.
- 正方格子などへの応用例は以下の論文が詳しい。
“Locations of multicritical points for spin glasses on regular lattices”
Masayuki Ohzeki, *Phys. Rev. E* **79** (2009) 021129.
- スピングラス相の存在可否について双対変換で言及したのは以下の論文である。
“Analytical evidence for the absence of spin glass transition on self-dual lattices”
Masayuki Ohzeki and Hidetoshi Nishimori, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 332001.

参考文献

- [1] K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986) 801.
- [2] M. Mézard, G. Parisi and M. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, 1986) .
- [3] V. Cannella and J. A. Mydosh, *Phys. Rev. B* **6** (1972) 4220.
- [4] M. A. Ruderman and C. Kittel, **96** (1954) 99.
- [5] T. Kasuya, *Prog. Theor. Phys.* **16** (1956) 45.
- [6] K. Yosida, *Phys. Rev.* **106** (1957) 893.
- [7] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *J. Phys. F* **5** (1975) 965.
- [8] G. Toulouse, *Commun. Phys.* **2** (1977) 115.
- [9] J Vannimenus and G. Toulouse, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **10** (1977) L537.
- [10] H. Nishimori, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981) 1169.
- [11] H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2001).
- [12] S. Kirkpatrick and D. Sherrington, *Phys. Rev. B* **17** (1981) 4384.
- [13] C. De Dominicis, M. Gabay, H. Orland and T. Garel, *J. Phys. (Paris)* **41** (1980) 923.
- [14] A. J. Bray and M. A. Moore, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **13** (1980) L469.
- [15] A. J. Bray and M. A. Moore, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **13** (1980) L907.
- [16] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 1792.
- [17] M. Kac, Trondheim Theoretical Physics Seminar, Nordita, Publ. No, 286 (1968).
- [18] S. F. Edwards, in *Proceedings of the Third International Conference on Amorphous Materials*, edited by R. W. Douglas and B. Ellis, (Wiley, New York), p. 279 (1970).
- [19] T. F. Lin, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 1584.
- [20] S. F. Edwards, in *Polymer Networks*, edited by A. J. Chompff and S. Newman, (Plenum, New York), p. 83 (1971).
- [21] A. Blandin, *J. Physique C* **6** (1978) 1568.
- [22] A. J. Bray and M. A. Moore, *Phys Rev. Lett.* **41** (1978) 1069.
- [23] G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1754.
- [24] A. Georges, D. Hansel, P. Le Doussal and J. -M. Maillard, *J. Physique* **48** (1987) 1.

- [25] F. Y. Wu and Y. K. Wang, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 439.
- [26] F. Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 235.
- [27] I. Syozi: in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 1, Eds. C. Domb and M. S. Green (Academic Press, 1972).
- [28] H. A. Kramers and G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **60** (1941) 252.
- [29] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.
- [30] F. J. Wegner, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2259.
- [31] H. Nishimori, *J. Stat. Phys.* **126** (2007) 977.
- [32] H. Nishimori and K. Nemoto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 1198.
- [33] J.-M. Maillard, K. Nemoto and H. Nishimori, *J. Phys. A* **36** (2003) 9799.
- [34] H. Nishimori and M. Ohzeki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** (2006) 034004.
- [35] F. D. A. Aarão Reis, S. L. A. de Queiroz and R. R. dos Santos, *Phys. Rev. B* **60** (1999) 6740.
- [36] A. Honecker, M. Picco and P. Pujol, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 047201.
- [37] M. Picco, A. Honecker and P. Pujol, *J. Stat. Mech.* (2006) P09006.
- [38] F. Merz and J. T. Chalker, *Phys. Rev. B* **65** (2002) 054425.
- [39] S. L. A. de Queiroz, *Phys. Rev. B* **73** (2006) 064410.
- [40] N. Ito and Y. Ozeki, *Physica A* **321** (2003) 262.
- [41] M. Hasenbusch, F. P. Toldin, A. Pelissetto and E. Vicari, *Phys. Rev. E* **77** (2008) 051115.
- [42] F. P. Toldin, A. Pelissetto and E. Vicari, *J. Stat. Phys.* **135** (2009) 1039.
- [43] S. L. A. de Queiroz, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 174408.
- [44] J. L. Jacobsen and M. Picco, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 026113.
- [45] M. Hinczewski and A. N. Berker, *Phys. Rev. B* **72** (2005) 144402.
- [46] F. D. Nobre, *Phys. Rev. E* **64** (2001) 046108.
- [47] M. Ohzeki, H. Nishimori and A. N. Berker, *Phys. Rev. E* **77** (2008) 061110.
- [48] M. Ohzeki, K. Takeda and H. Nishimori, work in progress.
- [49] H. Nishimori, *J. Phys. C* **12** (1979) L905.
- [50] H. Nishimori, *J. Phys. C* **12** (1979) L641.

- [51] E. Domany, J. Phys. C **12** (1979) L119.
- [52] D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1985).
- [53] A. Aharony and M. J. Stephen, J. Phys. C: Solid State Phys. **13** (1980) L407.
- [54] E. Domany, J. Phys. C **11** (1978) L337.
- [55] B. W. Southern and M. F. Thrope, J. Phys. C: Solid State Phys. **12** (1979) 5351.
- [56] B. W. Southern, J. Phys. C: Solid State Phys. **13** (1980) L285.
- [57] M. Ohzeki, Phys. Rev. E **79** (2009) 021129.
- [58] I. Morgenstern and K. Binder, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 1615.
- [59] A. Efrat, Phys. Rev. E **63** (2001) 066112.
- [60] M. Ohzeki, H. G. Katzgraber, H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, work in progress.
- [61] M. Inoue, J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 3699.
- [62] C. Thomas and H. G. Katzgraber, private communication.
- [63] W. L. McMillan, Phys. Rev. B **29** (1983) 4026.
- [64] A. J. Bray and M. A. Moore, J. Phys. C: Solid State Phys. **17** (1984) L463.
- [65] W. L. McMillan, Phys. Rev. B **30** (1984) 476.
- [66] R. N. Bhatt and A. P. Young, Phys. Rev. B **37** (1988) 5606.
- [67] A. K. Hartmann and A. P. Young, Phys. Rev. B **64** (2001) 180404.
- [68] J. Houdayer and A. K. Hartmann, Phys. Rev. B **70** (2004) 014418.
- [69] R. R. P. Singh and S. Chakravarty, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 245.
- [70] N. Kawashima and H. Rieger, Europhys. Lett. **39** (1997) 85.
- [71] R. Sungthong and J. Poulter, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 6675.
- [72] 田中和之 編, 確率的情報処理と統計力学 様々なアプローチとそのチュートリアル, 臨時別冊数理科学 (SGC ライブラリ 50) .
- [73] O. Shental, N. Shental, S. Shanmai, I. Kanter, A. J. Weiss and Y. Weiss, IEEE Tran. Inf. Theor. **54** (2008) 1500.
- [74] M. Ohzeki and T. Tanaka, work in progress.
- [75] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl and J. Preskill, J. Math. Phys. **43** (2002) 4452.
- [76] C. Wang, J. Harrington and J. Preskill, Ann. Phys. (NY) **303** (2003) 31.

- [77] H. G. Katzgraber, H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 090501.
- [78] H. G. Katzgraber, H. Bombin, R. S. Andrist and M. A. Martin-Delgado, Phys. Rev. A **81** (2010) 012319.
- [79] M. Ohzeki, Phys. Rev. E **80** (2009) 011141.