量子情報と統計力学の接点

藤井　啓祐
大阪大学大学院基礎工学研究科　物質創成専攻

量子情報における情報の最小単位は，量子ビットと呼ばれる直交する２状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の重ね合わせ状態（線形結合）$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ によって表現される．ただし，α と β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす複素数である．n 量子ビットの場合は，テンソル積状態，

$$|s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \cdots \otimes |s_n\rangle \equiv |s_1 s_2 \ldots s_n\rangle,$$

（$s_i \in \{0, 1\}$）を基底とした重ね合わせ状態，

$$|\psi_n\rangle = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_n} c_{s_1 s_2 \ldots s_n} |s_1 s_2 \ldots s_n\rangle$$

によって状態が記述される．このため，n 量子ビットの状態を記述するために必要なパラメータ $c_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ の数は，n に対して指数関数的に増大する．これが量子状態を記述することが非常に困難である原因である．また，これは量子系を用いることによって古典情報処理を凌駕する情報処理が可能となる所以でもある．

量子情報理論の構築において，このように一般には記述が困難な量子状態を，特定の状態のクラスに限定し，効率よく記述することが非常に重要となる．例えば，行列積状態（MPS）やMERA(multiscale entanglement renormalization ansatz) などはその一例であと言える．このような状態クラスの中で，量子情報処理において最も成功を収め，様々な基礎・応用研究のプラットフォームとなっている状態がスタビライザー状態である [1]．まず，Pauli 行列を I, X, Y, Z として，n 量子ビットに対する Pauli 群 $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P} = \{\pm 1, \pm i\} \times \{I, X, Y, Z\}$ のように定義する．そして，Pauli 群の可換部分群 $\mathcal{S} = \{S_i\}$ をスタビライザー群として定義する．つまり，$S_i \in \mathcal{P}$ かつ，すべての $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ に対して $[S_i, S_j] = 0$ である．スタビライザー状態は，すべてのスタビライザー群の元に対して

$$S_i|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$

を満たす状態 $|\Psi\rangle$ として定義される（これがスタビライザーと呼ばれる所以である）．実際，スタビライザー群の元 S_i はすべて可換なので，同時対角化ができる．スタビライザー群を指定するためには，高々n 個の演算子を指定すればよいので，スタビライザー状態は効率よく記述することが可能である．

スタビライザー状態は，量子状態のごく一部を占めるに過ぎないが，量子情報処理において非常に重要な役割を担っている．例えば，測定に基づく量子計算 [2] において量子計算の資源となる状態（universal resource）はスタビライザー状態で与えられる．また，量子系における雑音を克服する技術である量子誤り訂正符号もスタビライザー状態によって系統的に記述される [1, 3, 4]．最近では，スタビライザー状態とある直積状態との内積が古典統計模型の分配関数と対応することが明らかとなり [5]，２次元正方格子上のイジ

ング模型分配関数の普遍性 [6]（すなわち，他の任意の格子上の古典統計模型はすべてこの分配関数に適当な結合定数と磁場を与えてることによって再構成できる）や，分配関数の計算の困難性と量子計算の関連性が議論され始めている [7]．さらには，上述の量子誤り訂正符号における誤り訂正限界の導出がスピングラス模型における転移点を求める問題と等価であったり [8]，統計力学にいて開発された手法を用いてフォールトトレラント量子計算の性能解析が行われるなど [9]，量子情報と統計力学の接点が浮き彫りになりつつある．本講演では，このような量子情報と統計力学の接点について非量子情報研究者にも広く知って頂くためにスタビライザー形式について基礎からの導入を行い，その応用として統計力学との接点がある量子誤り訂正問題と，古典統計模型の分配関数とスタビライザー状態との対応に関する研究について概説する．

参考文献

[1] D. Gottesman, Ph.D. thesis, California Institute of Technology (1997); arXiv:quant-ph/9705052.

[2] R. Raussendorf and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001); R. Raussendorf, D. E. Browne, and H. J. Briegel, Phys. Rev. A **68**, 022312 (2003).

[3] P. W. Shor, Phys. Rev. A **52**, R2493 (1995).

[4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge, 2000).

[5] M. Van den Nest, W. Dür, and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **98**, 117207 (2007).

[6] M. Van den Nest, W. Dür, and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **100**, 110501 (2008).

[7] G. De las Cuevas, W. Dür, M. Van den Nest, and M. A. Martin-Delgado, New J. Phys. **13**, 093021 (2011).

[8] E. Dennis, A. Yu. Kitaev, A. Landahl, and J. Preskill, J. Math. Phys. **43**, 4452 (2002).

[9] K. Fujii, Y. Nakata, M. Ohzeki, and M. Murao, arXiv:1209.1265.