

有限時間熱機関の効率論による非平衡物理学へのアプローチ¹

泉田 勇輝²

東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻 日本学術振興会特別研究員 (PD)

熱機関は熱を仕事に変換する装置である。カルノーによれば、熱を仕事に変換するには温度 T_h の熱源から受け取った熱 Q_h は 100 パーセント仕事 W には変換されず、より低い温度 T_c の熱源に残り $-Q_c \equiv Q_h - W$ を熱として捨てる必要がある。これは、熱機関の効率 $\eta \equiv W/Q_h$ は 1 を超えることが不可能であることを意味している。実際、カルノーによれば、 $\eta \leq \eta_C \equiv 1 - T_c/T_h$ となって熱源の温度で決まる上限値 η_C (カルノー効率) が存在する。このカルノー効率は、全ての可逆的な熱機関において成立する。熱機関が可逆的になるためには無限にゆっくりと熱平衡状態を経由して動作する準静的極限が必要である。例えばカルノーサイクルは高温・低温側の熱源と接触する準静的等温過程を準静的断熱過程でつないだ熱力学サイクルでありカルノー効率を達成する熱機関モデルとして知られている。

一方、可逆な熱機関は準静的極限が仮定されるため、単位時間当たりの仕事を意味する仕事率 (パワー) はゼロになってしまうという実用上の問題点がある。工学的な観点からは最大の仕事率を目指すのが望ましい場合も多い。このような問題意識のもと Curzon と Ahlborn はカルノーサイクルを有限時間に拡張した熱機関の数理モデルを用いて、その最大仕事率時の効率 η^* が $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_c/T_h}$ (Curzon-Ahlborn (CA) 効率) のように熱源の温度だけで与えられるという興味深い結果を導いた [1]。彼らの結論は実際には特殊なケースでしか成立しないことが後に分かるものの、最大仕事率時の効率というアイデア自体はその後の研究に大きな影響を与えた。

より正確な熱機関の最大仕事率時の効率を決定する問題は近年になって再び注目を集めている。Esposito, et al. はカルノーサイクルを最低次の非平衡度まで有限時間に拡張したモデルを提案した [2]。このモデルでは、熱源との熱のやりとりが準静的極限から以下のように拡張される:

$$Q_h = T_h \Delta S - \frac{T_h \Sigma_h}{\tau_h} + \dots, Q_c = -T_c \Delta S - \frac{T_c \Sigma_c}{\tau_c} + \dots \quad (1)$$

ここで ΔS は高温熱源と接触している際の作業物質の準静的エントロピー変化、 τ_h (τ_c) は高温 (低温) 熱源との接触時間、 Σ_h と Σ_c は正の定数を仮定する。彼らはこの熱機関の最大仕事率時の効率 η^* には

$$\eta_-^* \equiv \frac{\eta_C}{2} \leq \eta^* \leq \frac{\eta_C}{2 - \eta_C} \equiv \eta_+^* \quad (2)$$

のように下限値 η_-^* と上限値 η_+^* が存在するという注目すべき結果を導いた。ちなみに CA 効率はこれら下限値と上限値に挟まれた範囲に存在することも分かる。一方、我々は最近

¹本研究の一部は北海道大学大学院理学研究院の奥田浩司氏との共同研究である

²E-mail: izumida@serow.t.u-tokyo.ac.jp

より一般的な熱流-パワー変換系を

$$J_1 = \dot{x} = L_{11}X_1 + L_{12}X_2, \quad (3)$$

$$J_2 = \dot{Q}_h = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 - \gamma_h J_1^2 \quad (4)$$

のような散逸項 $-\gamma_h J_1^2$ を含んだ Onsager 関係式で記述することを提案した [3]. ここで $X_1 \equiv F/T_c$, $X_2 \equiv 1/T_c - 1/T_h$ はそれぞれ外力 F と温度差による熱力学的力, J_1, J_2 はそれぞれ X_1, X_2 に共役な熱力学的流れ, L_{ij} 's は Onsager 係数 (相反関係 $L_{12} = L_{21}$ を仮定), $\gamma_h > 0$ は散逸の強さを表す定数である. ここで $q \equiv L_{12}/\sqrt{L_{11}L_{22}}$ はカップリング係数と呼ばれる Onsager 係数によって定義される量であり, エントロピー生成の非負性より $|q| \leq 1$ がいえる. この時与えられた q のもとでは, 最大仕事率時の効率 η^* は

$$\eta_-^q \equiv \frac{\eta_C}{2} \frac{q^2}{2 - q^2} \leq \eta^* \leq \frac{\eta_C}{2} \frac{q^2}{2 - q^2 (1 + \eta_C/2)} \equiv \eta_+^q \quad (5)$$

のように熱源の温度と q によって決まる下限値 η_-^q と上限値 η_+^q が存在することが導ける. ここで $|q| = 1$ の場合に注目すると, Eq.(2) は Eq.(5) と一致することが分かる. しかも η_+^q はこの $|q| = 1$ の場合に最大値 $\eta_C/(2 - \eta_C)$ をとることも分かる. つまり, 有限時間カルノーサイクルは η^* の最大値を与える最も”性質の良い”モデルであることが結論される. しばしばカルノーサイクルは「ピストンの膨張・圧縮運動によって誘起される熱流以外に無駄な熱流がない」ようなサイクルであると言われるが, この $|q| = 1$ の条件はその数学的表現であると解釈することもできる. しがしながら, なぜ有限時間カルノーサイクルのような周期的な熱力学サイクルとこのような Onsager 関係式で記述される系が最大仕事率時の効率 η^* に関して同様な結果を与えるのであろうか. Eqs. (3), (4) で記述される系は有限時間カルノーサイクルのみならず, 熱電効果を利用したデバイス [4] や情報通信プロセスのエネルギー論 [5] についても同様な数学的構造があることが最近認識されてきている. その意味で有限時間熱機関の効率論は領域横断的なアイデアを提供する. またより高次の非平衡性をもった熱機関は Eq. (5) に制限される必要はないので, Eq. (5) は熱機関の非平衡度を調べるリトマス試験的な役割を果たす. 講演では有限時間熱機関の物理学の基礎から始め, これまでの進展とその広がり, 非平衡系物理学への今後の可能性について有限時間カルノーサイクルの性質を中心に議論したい.

参考文献

- [1] F. Curzon and B. Ahlborn, Am. J. Phys. **43**, 22 (1975).
- [2] M. Esposito, R. Kawai, K. Lindenberg and C. Van den Broeck, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 150603.
- [3] Y. Izumida and K. Okuda, EPL. **97** (2012), 10004.
- [4] Y. Apertet, H. Ouerdane, O. Glavatskaya, C. Goupil and P. Lecoeur, EPL. **97** (2012), 28001.
- [5] Y. Zhou and D. Segal, Phys. Rev. E **82**, 011120 (2010).