Dictionary Learning への統計力学的アプローチ

坂田　綾香，樺島　祥介
東京工業大学大学院　総合理工学研究科

圧縮センシングとは、原情報がスパース、すなわちゼロ成分が有限の確率で存在するという事前知識を用いて、圧縮された表現から原信号を復元する手法である[1]。観測行列 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ を用いた線形変換により、信号行列 $\boldsymbol{X} \in\mathbb{R}^{N\times P}$ がデータ行列 $\boldsymbol{Y} \in\mathbb{R}^{M\times P}$ に変換された場合を考える。これは P 個の N 次元データに対して M 回の観測を行い、その結果から元のデータを推定する問題とも言える。$M < N$ のとき、$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{FX}$ の解 $\boldsymbol{X}$ は一意に定まらず、原信号を復元することは一般的には不可能である。しかし $\boldsymbol{X}$ のゼロ成分が有限の割合で存在するとき、そのスパース性を利用して原情報を復元する枠組みが圧縮センシングである。

一方、原情報に対してスパース性を仮定せずに、データの次元より少ない観測結果から復元を行う問題は、ブラインド圧縮センシングと呼ばれる[2]。ブラインド圧縮センシングでは、観測行列 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ と観測結果 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{M\times P}$ は既知であるとして、①$\boldsymbol{Y}$ を、$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{DS}$ を満たすスパース行列 $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n\times P}$ と辞書行列 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{M\times n}$ に分解し、②$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{FB}$ を満たす基底行列 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N\times n}$ を得て、原信号を $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BS}$ として復元する。すなわちブラインド圧縮センシングは、適切な基底 $\boldsymbol{B}$ のもとで原信号はスパース行列として表現できるという事前知識を用いて、原情報を復元する方法である。①の手続きは Dictionary Learning と呼ばれる[3]。Dictionary Learning の一意性は、ブラインド圧縮センシングによる復元が成功するための必要条件であると言える。文献[4]では、Dictionary Learning の一意性が議論されており、$\boldsymbol{S}$ の各コラムの非ゼロ成分数が k のとき、ある特別な条件を課したうえで、$P_c = (k+1)_N\mathrm{C}_k$ であれば一意に $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{S}$ を構成できることが示された。この P_c 値は十分条件であり、実際はさらに少ないサンプル数でも $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{S}$ を決定できる場合があると考えられる。

本研究では、Dictionary Learning の統計力学模型を構成し、一意性に関する研究を行う。ここでは P 個のサンプルはランダムに与える。その場合でも、サンプル数 P を増やすことで辞書行列 $\boldsymbol{D}$ が一意に定まることが予想される。本発表では、$\boldsymbol{D}$ の一意性について、P 方向の相転移として捉える事が出来るかということを考える。その解析と今後の応用について説明したい。

[1] Candes E J and Wakin M B, 2008 IEEE Signal Processing Magazine 25 21.
[2] Gleichman S and Eldar YC, 2011 IEEE Transactions on Information Theory 57 6958.
[3] Rubinstein R, Bruckstein A M and Elad M, 2010 Proceedings of the IEEE 98 1045.
[4] Aharon M, Elad M and Bruckstein A M, 2006 Linear Algebra and Its Applications 416 48.