

結び目の彩色問題

中島 千尋

九州大学 大学院理学研究院 物理学部門

結び目は昔から素朴な問題意識とともに数学の対象となってきた。また近年は生体高分子の組織化や機能の発現にトポロジー構造が深く関わっていることが見出され [1]、熱揺らぎを受ける結び目構造の実現確率分布や選択・制御の問題が注目を集めている。

結び目の理論と統計力学の関係は深く [2]、R 行列を通した多項式不変量と可解模型の対応関係 [3] や高分子レオロジーへの応用 [4] がある。多項式不変量と可解模型の対応関係は指摘されているが、関係が存在することと具体的な結び目の弁別・解析が可能であることの間にはギャップがある。実際、結び目不変量の計算量は大きく、多くの場合に射影図式の交点数やひもの長さの指数関数で計算量が増大することが知られている。他にも、Jones 多項式の計算 [5] や結び目の単純化による自明性判別 [6] が NP 計算量クラスに属することが証明されるなど、結び目のトポロジーには計算機科学的にも興味深い話題がある。前述の通り、生体高分子の大規模な高分子配位の結び目構造の実現・遷移の仕方を解析する動機があるが、計算量の問題は多くの点で壁となっている。

与えられた結び目についての不変量の計算に関連して、我々は結び目の p 彩色数と呼ばれる不変量（ある条件を満たす p 色塗り分けの配位の数）を計算する問題を、射影図式の弧と交点の情報を 2 部グラフにマップすることでグラフ上の制約充足問題に定式化できることを見出し、高分子結び目のサンプルに対してレプリカ交換モンテカルロ法と熱力学積分を用いてこの不変量の計算を行った [7]。この方法がどの程度大きな結び目に対して現実的に適用できるかは現在調査中であるが、塗り分け配位について幾つかの新しい事実が見出されている。例えば、非自明な塗り分けが可能な p の値の系列が同じである結び目の組が幾つか知られているが、それらにおいても塗り分け配位そのものには重複が無いこと、塗り分けの配位にラテン方阵との関係が示唆されること（詳細は未解明）などである。

射影図式をグラフに対応させる方式を用いて、固定された構造の不変量計算にとどまらず、構造の遷移を扱うことも可能である。結び目の完備な変形として知られる Reidemeister 移動をグラフの局所的な変換として定式化することができる。そのため可約な結び目の変形（結び目をほどく操作など）はグラフの変形の繰り返しとして記述でき、これを用いて可約な結び目の単純化問題をグラフ上で考えることができる。結合の情報のみを抽出することで、紐の空間構造において各々の弧の長さに依存する揺らぎの効果は無視される。しかし結び目の大規模構造の変化に対して一定の示唆を与えることを期待している。特に、結び目をほどくことによる自明性判別問題が NP 計算量のクラスに属する [6] ことを受けて、グラフ Reidemeister 変形における準安定状態の埋め込まれ方を調べることにより計算量クラスとの関係にアプローチすることは興味深い。

講演では最近の筆者らの仕事の内容を中心に述べるが、確率的アルゴリズムを用いた計算トポロジーの問題へのアプローチの可能性についても紹介する。『グラフによる結び目の単純化問題』、『Jones 多項式などの多項式不変量のモンテカルロ法による計算の性能』などの話題に触れたいと考えている。

参考文献

- [1] C. Ernst and D. W. Sumners, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **108**, 489 (1990) など。

- [2] L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, (World Scientific, 1991).
- [3] T. Deguchi, et.al., J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 3039 (1987) など。
- [4] T. Deguchi and K. Tsurusaki, arXiv:hep-th/920911.
- [5] D. J. A. Welsh: *Complexity: Knots, Colorings and Counting*, London Mathematical Society Note Series 186, (Cambridge University Press, 1993).
- [6] J. Hass, J. C. Lagarias, and N. Pippenger, J. ACM, **46**, 185 (1999).
- [7] C. H. Nakajima and T. Sakaue, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 035001 (2012).