熱場ダイナミクスを用いた量子エンタングルメントの研究

橋爪 洋一郎　鈴木増雄
東京理科大学大学院　理学系研究科応用物理学専攻

熱場ダイナミクスでは，状態の概念を拡張して，量子力学的な期待値の表現と統計力学的な期待値の表現とを統一することができる (Fano 1957, Prigogine et al. 1973, Takahashi and Umezawa 1975)．すなわち，チルダ空間に拡張されたヒルベルト空間内に定義される状態

$$|\psi(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}}\sum_{n} e^{-\beta\mathcal{H}/2}|I\rangle \tag{1}$$

を用いて，$\langle A\rangle = \langle\psi(\beta)|A|\psi(\beta)\rangle$ と書ける．ここで，$|I\rangle$ は $\{|n\rangle\}$ と $\{|\tilde{n}\rangle\}$ の直積空間に定義される状態で、基底状態 $\{|n\rangle, |\tilde{n}\rangle\}$ には $\mathcal{H}$ の固有ベクトルでないものをとってもよいことが示されている (Suzuki 1985)．$\exp[-\beta\mathcal{H}/2]$ は $\{|n\rangle\}$ で張られる部分空間にしか作用しないため，ハミルトニアンの作用した状態の構造を追うのに適している．実際，この特徴を用いて，三角格子反強磁性体における RVB 状態の解析 (Suzuki 1986) や密度行列繰り込み群への応用 (Feiguin and White 2005) がなされている．

ところで，近年，ブラックホールや量子系における AdS/CFT 対応 (Maldacena 1997) などが知られ，エンタングルメントエントロピーの振る舞いが注目されている．エンタングルメントエントロピーとは，系全体を部分系 A と B に分割した際，例えば部分系 B のゆらぎが部分系 A にどの程度影響するかを示す量で，全系の密度行列 ρ_{All} を用いて

$$S_{\mathrm{A}} = -k_{\mathrm{B}}\mathrm{Tr}_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}\log\rho_{\mathrm{A}}; \quad \rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{All}} \tag{2}$$

と定義される．今後，量子計算の発展においてエンタングルメントエントロピーがさらに重要な役割を果たすことが期待できる．

本研究では，フラストレーションを含む量子系でのエンタングルメントエントロピーを調べる新しい視点として熱場ダイナミクスの方法を用いた．その結果，エンタングルメントを表現する密度行列 ρ_{A} は一般に

$$\rho_{\mathrm{A}} = \rho_{\text{A-orig.}} + \rho_{\text{ent.}} \tag{3}$$

に分割できることがわかった．$\rho_{\text{A-orig.}}$ は部分系 A 自体の揺らぎに対応していて，$\rho_{\text{ent.}}$ が本来のエンタングルメントに対応する．ここでエントロピー $S_{\text{ent.}} = -k_{\mathrm{B}}\mathrm{Tr}\rho_{\text{ent.}}\log\rho_{\text{ent.}}$ を定義してフラストレーションなどとの関係を調べる．今回対象とする系は最も単純な 2 スピン系で，磁場 H が相互作用 J と競合する場合 $\mathcal{H}_1$ としない場合 $\mathcal{H}_2$ である．その結果，磁場が相互作用と同程度に大きくなると，$S_{\text{ent.}}$ は，競合のある系 $(\mathcal{H}_1)$ では，競合のない系 $(\mathcal{H}_2)$ の約 7 倍程度に大きなエンタングルメントを持っていることが計算される．

このように，熱場ダイナミクスを用いたエンタングルメントの研究は状態に注目することができるため，非常に有用である．