圧縮センシングと統計力学

竹田 晃人
東京工業大学 総合理工学研究科 知能システム科学専攻

圧縮センシングは原情報の疎性を利用し圧縮情報から原情報を復元しようとする技術であり，近年理論と応用の両面から注目されている．

以下線形方程式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ で記述される系を考える．$\boldsymbol{x}$はN次元原情報・$\boldsymbol{y}$はP次元圧縮情報($P<N$)・$\boldsymbol{F}$は原情報の展開基底と情報圧縮過程から決まる$P \times N$次元の圧縮行列である．ここで$\boldsymbol{x}$のN次元成分のうちρN次元$(0<\rho<1)$のみが非零で残りは零(疎)とする．また圧縮率を$\alpha \equiv P/N$で定義する．このとき$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{F}$が既知とすると，もし$\alpha > \rho$であれば非零成分数は圧縮後の方が大きい為原理的には原情報$\boldsymbol{x}$を復元する事が可能と考えられる．但し原情報ベクトル$\boldsymbol{x}$の非零成分の位置が分かれば復元可能性は自明で有るが，この問題では原情報どの成分が非零なのか分からない．その為原情報を正しく復元する為に何らかの特殊なアルゴリズムが必要となるが，多項式時間で計算可能なアルゴリズムとしてCandèsらはℓ_1ノルム再構成法を提案した. これは原情報$\boldsymbol{x}$の復元の際原情報の疎性の評価指標にℓ_1ノルムを用いるものである．ただこの方法の場合は$\alpha > \rho$ならば原情報が復元出来るということにはならず，復元可能な圧縮率の限界値αはこれよりも高くなる．この限界値αは自明でないが疎性指標ρや行列$\boldsymbol{F}$に依存すると想像出来る．

この限界値αであるが情報理論の立場から次のように求められている．以下$\boldsymbol{F}$はランダム(長方)行列であると仮定する．(1)Candès, TaoらはRestricted Isometry Property(制限等長性) という原情報復元に必要な行列$\boldsymbol{F}$の性質の追究，及び Wishart型ランダム行列の最大・最小固有値分布の利用により圧縮率限界を評価した．この限界は復元誤りを許さない厳しい限界に対応する．(2) Donoho, Tannerらはℓ_1ノルム再構成問題を高次元幾何学の問題に置換え，高次元空間内のポリトープの部分空間への射影の様相を考察することにより圧縮率限界を評価した．この方法で求められた弱閾値と呼ばれる限界は典型限界(有限系で稀に復元誤りを許す限界)に対応する．

一方，統計力学的手法で圧縮率限界が求められる事が樺島・和田山・田中により指摘された．要約すればℓ_1ノルムをエネルギー関数とするある種の平均場スピングラス模型をレプリカ法により解析し，その模型の相転移を調べることでℓ_1ノルム再構成問題に関しての圧縮率限界を求める事が出来るということである．その結果は驚くことに(2)と一致した．その後筆者は樺島氏とこの方法を一般化しより広い設定下でℓ_1ノルム再構成法の限界圧縮率を評価する枠組みを提案している．

以上の内容を圧縮センシングに関する他の統計力学的アプローチを交えて概観し，時間に余裕が有れば上記解析で利用したレプリカ対称仮定の正当性の議論，及びレプリカ対称性の破れが圧縮センシングの性能解析に与える影響について考察しようと思う．