断熱的二温度系の疎結合スピングラス模型における
ネットワーク構造

坂田　綾香
東京大学大学院総合文化研究科　広域科学専攻　相関基礎科学系

Watts と Strogatz によるスモールワールドモデルの提案から始まる複雑ネットワーク研究は，複雑系における普遍的性質を捉える一つの方法として発展してきた [1]．研究を通して，現実に存在する様々なネットワークは，スケールフリー性やクラスター性などの性質を持つことが明らかにされた．近年は，より詳細にネットワークの構造を抽出するための新しい概念が提案されている．その一つが assortativity という概念である [2]．assortative なネットワークとは，次数が正の相関を持つネットワークを意味する．すなわち，高い次数を持つサイト同士が繋がる確率が高いネットワークである．一方で disassortative なネットワークでは，次数が負の相関を持ち，高い次数と低い次数のサイト同士が繋がる確率が高い．assortativity は，共著者のネットワークなどにのみ見られる希少な性質であることが知られている [2]．この概念が提案されて以降，系の振る舞いと次数相関の関係を調べた研究が幾つか行われており，最近ではニューラルネットワークの挙動と次数相関の関係なども研究されている [3]．次数分布から定義されるスケールフリー性とは異なり，assortativity はネットワーク内に存在する相関から定義されるものであり，ネットワーク構造の不均一性の指標であると言える．

assortative なネットワークをモデル化する方法は幾つか試みられており，ネットワーク内に存在する，局所的に密に繋がった community 構造に着目した方法などがある．既存の研究においては，ネットワーク自体に何らかの初期配位と時間発展則を与えることで，ネットワークを構成するという方法が用いられている．これらの研究は，assortativity など，ある特徴を持ったネットワークを実装することを目的とした研究であり，それらネットワークがどのような物理的過程を経て実現したのか，またどのような条件化で実現するのかという点については十分な議論がなされていない．そこで本研究では，ネットワーク自体に恣意的な時間発展則を与えるのではなく，ネットワーク上のサイトの状態に応じて自発的にネットワークが構成されるモデルを導入する．その上で，assortativity が獲得されるのかを議論する．

ネットワークの進化のモデルとして，本研究では partial anneal 系と呼ばれるスピン系のモデルを導入する [4,5]．partial anneal 系とは，各サイト上に置かれたスピン変数と，スピン間のネットワーク (相互作用変数) という二変数から成る系である．二つの変数は異なるタイムスケールで時間発展し，スピン変数は相互作用変数に比べて十分に時間スケールが速いと仮定する．したがって，相互作用変数の単位時間内でスピン変数は定常状態に至る．相互作用変数の時間発展は，スピン変数の定常状態の性質により決まる．特にスピンの自由エネルギーにより相互作用の時間発展が決まるとき，partial anneal 系は有限レプリカ数の系に対応する．partial anneal 系の研究は，主にスピングラスの平均場模型に対して行われてきたが，ネットワーク構造の時間発展を考えるため，ここでは疎結合スピングラス模型に対して研究を行う．

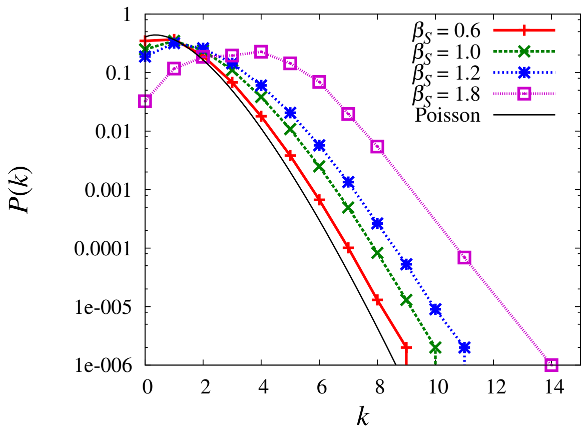

図 1: レプリカ数 $n = 0.9$, 平均結合数 $c = 0.9$ における次数分布の温度 T_S 依存性を示す．$J_0 = 0$, $J = 1$ とした．スピングラス転移温度は $\beta_{\mathrm{SG}} \sim 1.16$ である．平均結合数 $c = 0.9$ の Poisson 分布を実線で示している．

本研究では，疎結合スピングラス模型の一つである Viana-Bray model [6] を導入し，partial anneal 系における性質を解析する．Viana-Bray model は Erdös-Renyi ランダムグラフ上のスピングラス模型であり，次のハミルトニアンで与えられる．

$$H_S(\boldsymbol{S}|\boldsymbol{J}, \boldsymbol{D}) = -\sum_{i<j} D_{ij} J_{ij} S_i S_j \tag{1}$$

$\boldsymbol{S} \equiv \{S_i\}$ $(i = 1, \cdots, N)$ は ± 1 の二値をとるスピン変数である．$\boldsymbol{J} \equiv \{J_{ij}\}$ $(i, j = 1, \cdots, N)$ はスピン S_i，S_j 間の相互作用を表す．また $\boldsymbol{D} \equiv \{D_{ij}\}$ $(i, j = 1, \cdots, N)$ は $0, 1$ の二値をとる変数であり，0 であれば S_i，S_j 間に相互作用は存在せず，1 であれば存在する．この $\boldsymbol{D}$ の配位が系のネットワーク構造を指定する．Viana-Bray model に対してレプリカ法による解析 [7] を行い，$\boldsymbol{D}$ の性質として，次数分布と次数相関を導出した．例として，あるパラメータ領域における次数分布を図 1 に示す．どの温度においても次数分布にはピークが存在し，その意味で partial anneal 系の Viana-Bray model はスケールフリー性を持たないことが分かる．本発表では，次数分布，次数相関を解析する手続きと，partial anneal 系におけるネットワーク構造の性質について説明する．

参考文献

[1] D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature*, **393**, 440 (1998).
[2] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
[3] S. de Franciscis, S. Johnson, and J. J. Torres, arXiv:1012.1813.
[4] R. W. Penney et. al., *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 3681 (1993).
[5] A. Sakata and K. Hukushima, *Phys. Rev. E.* **83**, 021105 (2011).
[6] L. Viana and A. J. Bray, *J. Phys, C*, **18**, 3037 (1985).
[7] R. Monasson, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 513 (1998).