スピングラス模型における平均場方程式の解空間

中島 哲也[1], 福島 孝治[1], 樺島 祥介[2], Tommaso Rizzo[3]
東大院総合文化[1]，東工大総合理工[2]，ローマ大学[3]

疎なスピングラス模型の平均場理論として, 近年, キャビティ法と呼ばれる手法が注目されている。このキャビティ法は， レプリカ対称な相においては正しい評価を与えることが経験的に知られているが， いわゆる point-to-set correlation と呼ばれるタイプの相関が生まれると， その結果はもはや正しくない.

そこでその改良として近年， 1RSB キャビティ法という手法が開発され， スピングラスのみならず， 制約充足問題などの情報理論的文脈への応用も盛んに行われている. この手法では， キャビティ法によって導出された連立方程式（キャビティ方程式）を， 再び新たな統計力学の問題であると見なし，その解析を行う. こうすることによって， 問題がある意味で一段階「粗視化」され，元の問題の解空間のクラスター構造などが取り込まれる， と考えられている. 実際， 3-SAT と呼ばれる制約充足問題では， 1RSB キャビティ法から導かれたアルゴリズムは従来法に比べて驚異的な性能を発揮するため， この手法は，何らかの本質をとらえていることが示唆される.

本研究では， 1RSB キャビティ法の枠組みである「キャビティ方程式を新たな模型とみなす」という点に着目した. そこで，このようにして作られた模型に対する統計力学的解析を行った結果を紹介したい.

我々は， レギュラーランダムグラフ上二体相互作用の強磁性およびスピングラス模型

$$H(\mathbf{S}) = -\sum_{(ij)\in E} J_{ij} S_i S_j. \tag{1}$$

について解析を行った. ここに $S_i = J_{ij} = \pm 1$ で，$\Pr[J_{ij} = 1] = p$ とおく. また E をエッジの集合とする.

この模型に対するキャビティ方程式は， 絶対零度で

$$h_{l\to\mu} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}(l)\backslash\mu} \hat{h}_{\nu\to l}, \tag{2}$$

$$\hat{h}_{\mu\to l} = \mathrm{sgn}\left(J_\mu \prod_{k\in\mathcal{N}(\mu)\backslash l} h_{k\to\mu} \right). \tag{3}$$

と書くことができる. ここに k, l はバーテックスの添字， μ, ν はエッジの添字，$h_{l\to\mu}$ は整数をとるキャビティ磁場， $\hat{h}_{\mu\to l}$ は $0, \pm 1$ をとるキャビティバイアスである. また $\mathcal{N}(l)$ などは， ランダムグラフを二部グラフ表現したときの近接サイトを表す. そこで我々は， この連立方程式の解が基底状態に対応するようなハミルトニアンを構成し， その統計力学的解析を行った. 以下ではこのハミルトニアンで表される系を補助模型という. ここで補助模型のハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{aux}}(\hat{\mathbf{h}}) := \sum_\mu \sum_{l\in\mathcal{N}(\mu)} \left(1 - \delta(\hat{h}_{\mu\to l}, \Xi_{\mu l})\right)$$

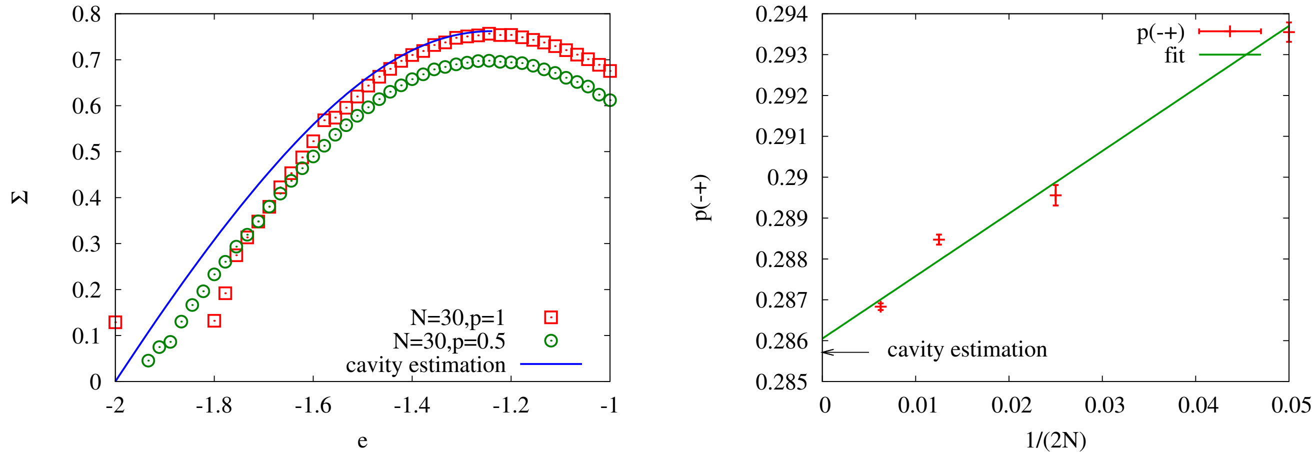

Figure 1: (左図) 補助模型における, 元の模型のエネルギーのヒストグラム. 縦軸は対数目盛. (右図) キャビティ磁場がある特定の値を取る確率の解析的および数値的評価. ともに C=4 のレギュラーランダムグラフ上.

where

$$\Xi_{\mu l} \quad = \quad \mathrm{sgn}\left(J_\mu \prod_{k\in\mathcal{N}(\mu)\setminus l} h_{k\to\mu}\right)$$

のように表される. この模型を解析するため, 近似解析とモンテカルロシミュレーションの二つを行った. 以下にそれぞれの結果について述べる.

1. 補助模型のキャビティ方程式を導出し, 補助模型を解析的に調べた.

補助模型の基底状態がキャビティ方程式の解になっているため, 補助模型に対してキャビティ法を適用することで, 元のキャビティ方程式の性質を調べることができる. この解析は, 通常のキャビティ法の性能解析をすることに対応するだけでなく, 先に述べたように, 1 RSB キャビティ法に対応するような解析をしていることに対応している. 特に, エネルギー密度分布をキャビティ法を用いて導出することに成功した. その結果, p の値に応じて分布が変化するという振る舞いは, この解析からは見られなかった.

2. モンテカルロ法によって, 1. で理論的に導出した結果の検証を行った.

1. の結果を検証するため, 補助模型のモンテカルロシミュレーションを行った. 実験には交換モンテカルロ法を用い, エネルギー密度のより正確な分布を求めるため, リウェイティングとマルチヒストグラム法を用いた. **1.** の結果をおおむね検証することはできたが, 分布の裾に対応する部分などに p 依存性がある可能性は否定できない. このようにして定義した系は、非常に緩和時間が長い系であり, モンテカルロ法による解析をさらに進めるためには, 何らかの工夫をする必要がある.

1,2 の結果は、現在のところ完全にコンシステントとはなっておらず, 今後両者の検証を行っていく必要がある。