

線形不可逆熱機関における最適化: 最大仕事率時の効率

泉田 勇輝¹

北海道大学大学院理学院 量子理学専攻

19世紀にフランスのSadi Carnotは自然界に存在する全ての熱機関には熱から仕事への変換効率に、熱源の温度だけで定まる上限値 (Carnot 効率) が存在していることを Carnot サイクルと呼ばれる理想化された熱機関のモデルを用いて導いた。Carnot 効率の発見は後にエントロピーと呼ばれる物理量 (熱平衡状態を記述するポテンシャル=熱力学関数) の存在と等価であることが明らかにされた。

Carnot 効率は熱機関を無限にゆっくりと、無駄なく熱を仕事に変換するような準静的極限で成立する。熱力学関数はこのような理想極限で定義されるわけである。一方、単位時間あたりの仕事である仕事率は Carnot サイクルではゼロになってしまう。現実の熱機関は有限の仕事率で動作しなければ意味がなく通常の熱力学では解析することができない。

準静的極限から離れた非平衡状態にある熱機関にどのようにアプローチするべきか。ヒントとなるのが、1975年のCurzonとAhlborn(CA)による最大仕事率時の効率 η_{Pmax} の予測である [1]。彼らは熱が Fourier の法則に従って流れる、有限時間で動作する熱機関のモデルを考案し、その最大仕事率時の効率が Carnot 効率のように系の詳細によらずに $\eta_{Pmax} = 1 - \sqrt{T_c/T_h} \equiv \eta_{CA}$ のように熱源の温度 ($T_h > T_c$) だけで与えられることを導いた。 η_{CA} は現在では Curzon-Ahlborn(CA) 効率と呼ばれている。2005年にVan den Broeckは温度差 $\Delta T \equiv T_h - T_c$ が十分に小さな熱機関が Onsager 関係式

$$J_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2, \quad (1)$$

$$J_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 \quad (2)$$

で記述されると仮定し、これを用いて線形不可逆熱機関の η_{Pmax} の ΔT の1次の値が

$$\eta_{Pmax} = \frac{\Delta T}{2T} \frac{q^2}{2 - q^2} \leq \frac{\Delta T}{2T} \quad (3)$$

で与えられることを示した [2]。ここで $T \equiv (T_h + T_c)/2$ は平均温度、 q はカップリング係数と呼ばれ L_{ij} を用いて $q \equiv L_{12}/\sqrt{L_{11}L_{22}}$ と定義される。等号はタイトカップリング条件 $|q| = 1$ が成立する時に達成されるが、これは温度差の2次を無視する範囲で CA 効率 $\eta_{CA} = \Delta T/(2T) + O(\Delta T^2)$ に一致している。このように導出が一般的であったため、これまで応用サイドで多かった CA 効率に関する研究はこの Van den Broeck による研究によって基礎物理サイドでも注目され始めている。

Van den Broeck の理論は当初、分子機械のような温度差や濃度差から定常的に仕事を取り出す熱機関に適用する目的で提案されたと思われる。しかしながら、我々は Carnot サイクルを有限の時間で動作させるモデル (有限時間 Carnot サイクルと呼ぶ) のような高温側と低温側の熱源が同時に作業物質に接触しておらず、交互に接触するような周期的に働く

¹E-mail: izumida@statphys.sci.hokudai.ac.jp

熱機関も Onsager 関係式で記述できることを示し、また実際に Onsager 係数を計算することで有限時間 Carnot サイクルがタイトカップリング条件を満たすモデルであることを証明した [3]. この有限時間 Carnot サイクルの Onsager 係数は、どのように熱機関を動かすかというプロトコルの情報を含んでおり、このプロトコルの選択によらずタイトカップリング条件は一般的に成立する [4].

我々は最近 Van den Broeck の理論をより一般的に拡張し、高温熱源側からの熱流に熱機関を有限時間で動作させるのに消費した外部からの仕事の散逸率 $-\gamma_h J_1^2$ を陽に含んだ、

$$J_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2, \quad (4)$$

$$J_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 - \gamma_h J_1^2 \quad (5)$$

で一般的な線形不可逆熱機関が記述できることを提案している [5]. ここで γ_h は正の定数である. この拡張された Onsager 関係式を用いると有限時間 Carnot サイクルの最大仕事率時の効率 η_{Pmax} を温度差の高次項まで含めて求めることができ、注目すべきことにその値は温度だけで定まり温度差が大きい領域では CA 効率よりも高くなることが明らかになった. この値は最適なプロトコルを与えることによって達成される. このように、有限時間 Carnot サイクルという熱機関のモデルと Onsager による線形不可逆熱力学の理論を結合できたことにより、熱機関の効率や仕事率という工学的な量を制御することが基礎的な非平衡物理の問題とつながっていることを理解できる.

近年、熱力学を非平衡状態へ拡張しようとする様々な試みが行われている. しかしながらどんな非平衡状態にも適用できるような一般理論が存在するとは考えにくく、何らかの制限された状態を考えることが必要であろう (例えば非平衡定常状態における熱力学 [6]). そこで、最大仕事率時の効率の普遍性を敷衍して、最大仕事率で動作している熱機関に対して、“最大仕事率熱力学” (Maximum Power Thermodynamics) を考える (夢想する) ことは面白いかもしれない.

講演では本研究の基本的なモチベーションから始め、できるだけ平易に最近の話題である Eqs. (4), (5) を用いた有限時間 Carnot サイクルの記述までを紹介したい.

参考文献

- [1] F. Curzon and B. Ahlborn, Am. J. Phys. **43**, 22 (1975).
- [2] C. Van den Broeck, Phys. Rev. Lett. **95**, 190602 (2005).
- [3] Y. Izumida and K. Okuda, Phys. Rev. E **80**, 021121 (2009).
- [4] Y. Izumida and K. Okuda, Eur. Phys. J. B, **77**, 499 (2010).
- [5] Y. Izumida and K. Okuda, in preparation.
- [6] Y. Oono and M. Paniconi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **130**, 29 (1998).