Young Scientists Meeting on Statistical Physics and Information Processing 2010

ランダムネットワークの頑強性に関する統計力学的評価

白木善史
東京工業大学大学院総合理工学研究科　知能システム科学専攻

近年, 複雑なネットワークの科学が大きな注目を集めている. その中でもネットワークのつながりの強さはネットワークを特徴づけるもっとも重要な尺度の一つである [1]. インターネットや送電線網, 航空路線などは故障に対して強くなければならない実ネットワークの例である. 一方で伝染病の感染拡大を防ぐという観点からは人間や動物のネットワークは少ない数の感染者の隔離によってつながりが断たれることが望ましい.

Edös と Rényi[2] によって提案されたランダムネットワークとその派生型は, 数理的な取り扱いが比較的容易なことから実ネットワークのモデルとして広く研究されている. ランダムネットワークの頑強性を調べることで実ネットワークの安全性の評価や構築のための指針に関する有益な情報を得ることができ, 現在までに多くの知見が得られている. 次数分布 $p(k)$ はランダムネットワークを特徴づける最も重要な指標の一つである. この確率分布はネットワーク上のランダム選んだサイト (点, ノード) が持つボンド (辺, エッジ) の数の頻度を表す. 加えて次数相関もランダムネットワークを特徴付ける重要な指標である. これは, 例えば大きな次数をもつサイトが, 大きな次数のサイトとつながりやすいのか或いは小さな次数のサイトとつながりやすいのかという傾向を表すものである. 相関係数は次数分布にとともに, 条件付確率 $r(l|k)$ を全ての k, l の組み合わせについて決めることで定めることができる. ここで $r(l|k)$ は次数が k のあるサイトを選んだとき, そのサイトが次数 l のサイトとつながっている確率を表す. さらに, 平均パス長やクラスター係数といった指標もランダムネットワークを考える上で重要であるがここでは多く触れない.

いくつかの先行研究ではネットワークの頑強性を知るためにパーコレーション理論の考え方を応用している [3]. パーコレーション理論はしばしば「つながりの科学」とも呼ばれるように格子系などにおいてサイトやボンドがある割合で削除されたときに, 残っているサイトやボンド同士つながっているかどうか（＝パーコレーション現象）を調べる研究分野である. 残っているサイトやボンドが互いにつながっているかたまりの中で最大のものを *giant component* と呼ぶ. 一般に, ある程度以上の割合でサイトやボンドを取り除いてしまうと格子或いはネットワークのサイズを無限大にした極限において gaint component は消失してしまう. このときの臨界的な削除率（あるいは残っているサイトやボンドの割合）を *percolation threshold* と呼ぶ. 以下では, あるネットワークの percolation threshold が大きければ, そのネットワークは頑強だと考える.

ランダムネットワーク上でのパーコレーション問題に関しては多くの研究成果が知られている. 特に Newman ら [4] が提案している生成関数による解析手法は非常に大きな成功を収めており, その後の研究に多大な影響を与えている. Newman 自身 [5] や Goltsev ら [6] はこの手法を次数相関があるネットワークに拡張した. また, サイトやボンドをランダムに削除する（これは故障などに対応する）単純なパーコレーション問題に加えて, ネットワーク上で重要な役割を果たしているサイト（これは一般的には次数が大きなサイトである）に対する選択的な攻撃に対しての問題も研究されている. 一方で, ネットワーク

構築の指標を得るために, ランダムな故障や選択的な攻撃に対してネットワークの次数分布などを最適化を試みる研究もある [7, 8]. これらのネットワークは二種類の次数しか持たず, 実ネットワークによく見られるような次数分布がべき乗分布になっているランダムネットワークに比べて攻撃に対して頑強であることが示されている.

しかしながら, これらに関連する問題にはまだ十分に理解が進んでいない部分もある. 本研究では, cavity 法に基づきランダムネットワークのパーコレーションに関する理論的な解析法を導出した上で, 最適化されたランダムネットワークにおけるサイトないしボンドへの選択的攻撃に対する次数相関の影響について調べる.

ランダムネットワークが木構造を持つと仮定すると, ランダムに選ばれた次数 k のサイトが giant component に含まれない確率 w_k は

$$w_k = \left(1 - \sum_m r_{mk}(1 - s_m)(1 - b_{mk})(1 - u_m)\right)^k \tag{1}$$

と評価される. ここで, u_m は注目しているサイトをネットワークから取り除いた系（cavity 系）において次数 m のサイトが giant component に含まれない確率である. この確率は cavity 法により self-consistent に評価することができる.

本研究では上記の式を使うことで, サイトないしボンドへの選択的攻撃に対するランダムネットワークの percolation threshold を解析的に求めその特徴について吟味した.

参考文献

[1] S. H. Strogatz. *Nature*, Vol. 410, pp. 268–276, 2001.

[2] P. Erdös and A. Rényi. *Publicationes Mathematicae*, Vol. 6, pp. 290–297, 1959.

[3] Duncan S. Callway, M. E. J. Newman, Steven H. Strogatz, and Duncan J. Wattz. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 5468–4371, 2000.

[4] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts. *Phys. Rev. E*, Vol. 64, No. 2, p. 026118, Jul 2001.

[5] M. E. J. Newman. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 89, No. 20, p. 208701, Oct 2002.

[6] A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes. *Phys. Rev. E*, Vol. 78, No. 5, p. 051105, 2008.

[7] André X. C. N. Valente, Abhijit Sarkar, and Howard A. Stone. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 92, No. 11, p. 118702, Mar 2004.

[8] G. Paul, T. Tanizawa, S. Havlin, and H.E. Stanley. *Eur. Phys. J. B*, Vol. 38, pp. 187–191, 2004.