コンプレキシティの多段階レプリカ対称性を伴う模型への拡張

中島 哲也, 福島 孝治
東京大学 総合文化研究科

平均場的なスピングラス模型においては, その自由エネルギー地形, すなわち局所磁化の関数としての擬似的な自由エネルギーを形式的に求める方法は比較的確立している. 具体的には全結合系における Thouless-Anderson-Palmer の方法や, 疎結合系における Bethe 近似の方法がそれに当たる.

このような地形は, 純粋系では相転移における対称性の破れを定性的に記述する上で非常に有用であったが, 空間依存性をあらわに残した自由エネルギー地形しか求められないスピングラス模型では, 具体的に何が起こっているのかを理解することは難しい.

そこで従来から, 地形の極小点の数を見積もる, という事が行われてきた. 自由エネルギーの極小点は, 分配関数の計算という観点からは鞍点という意味を持ち, 時間依存 Ginzburg-Landau 的な観点からは, 定常状態を表す. そのため, 極小の情報を抽出することは平衡の問題と動力学を結びつけるための第一歩となりうる. 動力学的な知見は, 典型的なサンプルに対するアルゴリズムの性能を議論することを可能にするため, 計算科学的な観点からも重要な問題である. この極小点の数の対数を, 本予稿では平均場コンプレキシティと呼ぶ[1].

また素朴な議論として, この極小点を熱力学極限におけるボルツマン分布の極大点とみなし, 極小点と純状態を同一視してしまうものがある. ここに純状態とは, 状態空間の部分集合で, 熱力学極限においてギブス測度を分割する単位のことである, と仮に定めておく. しかしこの純状態とは非常に微妙な概念であり, 自由エネルギー地形の極小点の数との対応は必ずしもついていない. そしてこの意味での純状態の数の対数を, 以下ではコンプレキシティと呼ぶ.

先行研究におけるコンプレキシティは, おおよそ上で指摘した二つの定義に対応して二種類存在する. 前者, すなわち自由エネルギー地形の極小点の個数は曖昧さなく定義されているため, 解析上の近似などはあるにせよ, 原理的には正しい評価が可能であり, 例えば数値的な測定によって検証されるべき量である. 一方, 後者に対応したコンプレキシティについては, Monasson によって考案された方法によって, 少なくとも近似的には評価できると考えられている [1]. これらいずれの定義/方法によっても, コンプレキシティの解析においては, 一段階レプリカ対称性の破れ (RSB) を仮定した自由エネルギーが重要な役割を果たすことが指摘されている. しかし一方で, 対象となる模型が多段階 RSB を示す場合, Monasson のコンプレキシティの解析を素朴に拡張すると非物理的な結果が得られる模型が存在する.

この問題を解消するため, まずコンプレキシティ概念そのものを多段階 RSB を示す模型の場合に拡張した. これは, 多段階 RSB を示す模型においては, 自由エネルギー地形が

[1] 一般的な語用法ではない.

階層的に形成されることを反映し, コンプレキシティもまた階層別に構成されるべきである, という物理的要請を直接に表現したものである. 具体的には, Monasson の方法を拡張することで, 各階層に応じた粗視化の程度によって純状態の数を数える枠組を構成し, それによってコンプレキシティを評価する方法を定式化した.

その結果, Parisi の多段階 RSB 自由エネルギーをどの分割変数でルジャンドル変換するのかに応じて, 各階層のコンプレキシティが評価できることがわかった. これは, スピングラス模型における超計量性, RSB, コンプレキシティという主要な概念を結びつける結果である. 今回はそのような解析の例として, 絶対零度における p 体相互作用 Sherrington-Kirkpatrick 模型

$$H = -\frac{1}{N^{(p-1)/2}}\sqrt{\frac{p!}{2}}\sum_{i_1<\cdots<i_K} J_{i_1\cdots i_K} S_1\cdots S_K, \qquad (S_i=\pm 1, J_{i_1\cdots i_K}\sim N(0,1))$$

を解析した結果について発表したい.

また合わせて, 上述の二つのコンプレキシティの違いを定量的に比較するため, 平均場コンプレキシティの数値的評価も行った. これは, 従来からなされていた平均場コンプレキシティの評価の検証であるとともに, p 体 Sherrington-Kirkpatrick 模型において二つのコンプレキシティがどう異なるのかを直接に検証することになっている.

絶対零度での自由エネルギー地形は元のハミルトニアンの極小値と一致するため, 離散変数上の最適化を行うことによっても数値的評価は可能であるが, 今回はモンテカルロ法によってエントロピーを評価することで, 解の数を評価した. 具体的には, 新たなハミルトニアン

$$H_{Sol} = -\sum_{i=1}^{N} S_i h_i(\mathbf{S}), \quad h_i(\mathbf{S}) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{j_2<\cdots<j_K, j_k(\neq i)} J_{ij_2\cdots j_K} S_2\cdots S_K\right)$$

の絶対零度極限は, 解にわたる一様測度であることを用いたサンプリングを行った. その結果, 平均場コンプレキシティの解析の正当性および二つのコンプレキシティの違いが示された.

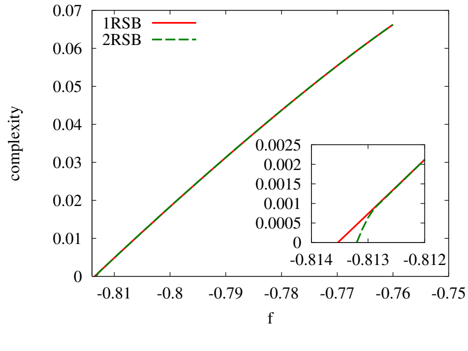

図 1: 2 段階 RSB 解によって評価された 3 体 Sherrington-Kirkpatrick 模型の絶対零度コンプレキシティ. 高階の RSB の影響は, 定義域の左端に現れ, 定義域の右端には影響を及ぼしていない. 挿入図は, コンプレキシティがゼロ近傍の拡大図.

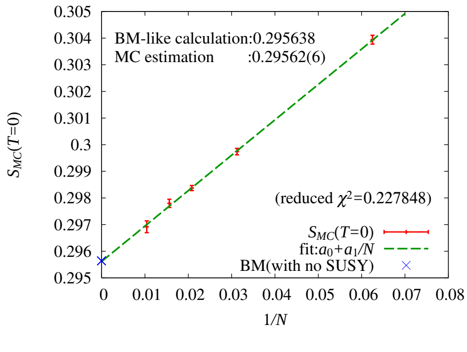

図 2: モンテカルロ法による, 平均場コンプレキシティ(全数) の評価. 横軸はサイズ N の逆数で, 縦軸は一サイトあたりの平均場コンプレキシティ(全数). N が有限の点はモンテカルロからの評価で, $1/N=0$ の点は, Rieger による評価値.

[1] R. Monasson, Phys. Rev. Lett. **75**, 2847(1995).