確率伝搬法による画像処理アルゴリズムの性能評価

片岡　駿

東北大学大学院情報科学研究科　応用情報科学専攻

1　はじめに

確率的画像処理はノイズや欠損により生じる画像データの不確実性を確率により理論的に表現しようとするものである．この画像処理の確率モデル化はベイズの公式

$$P(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g}) = \frac{P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f})P(\boldsymbol{f})}{\sum_{\boldsymbol{f}} P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f})P(\boldsymbol{f})} \tag{1}$$

により実現される．ここで $\boldsymbol{f}$ は原画像の階調値に対する確率変数のベクトルであり，$\boldsymbol{g}$ は劣化画像の階調値に対する確率変数のベクトルである．ベイズ統計による画像修復とは我々が原画像に対して持っている知識と劣化画像がどのような過程で劣化したのかをそれぞれ事前確率分布 $P(\boldsymbol{f})$ と尤度 $P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f})$ として設計し，それを式 (1) に代入して得られる事後確率分布 $P(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g})$ から原画像 $\boldsymbol{f}$ を推定して劣化画像 $\boldsymbol{g}$ を修復することである．しかし一般に画像処理の確率モデルの計算は大規模なものとなり，計算困難の問題がつきまとうため現実に応用するためには近似手法により計算量を削減する必要がある．確率伝搬法はそのような近似手法の一つであり，確率的画像処理において確率伝搬法が有効に働くことが知られている．本講演では確率伝搬法を用いた画像処理において評価関数の統計平均を計算し，実際にその性能を評価する．

2　確率伝搬法による画像処理

2.1　画像の確率モデル化と MPM 推定

本講演では画像は正方格子上の各頂点 i に $\boldsymbol{f}$ の要素 f_i が配列しているものとして表現し，簡単のため $f_i \in \{\pm 1\}$ の二値画像を扱い，$g_i \in \mathbb{R}$ とする．ベイズ統計による画像処理ではまず事前確率分布と尤度を設計する必要があるため事前確率分布と尤度をそれぞれ

$$P(\boldsymbol{f}, \alpha) \propto \exp\left(\alpha \sum_{(i,j)\in E} f_i f_j\right) \tag{2}$$

$$P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f}, \beta) \propto \exp\left\{\frac{\beta}{2}\sum_{i\in V}(g_i - f_i)^2\right\} \tag{3}$$

として設計する．ここで E, V はそれぞれ辺と頂点の集合であり，α, β はハイパパラメータであり，劣化画像 $\boldsymbol{g}$ の修復にはこのパラメータの値をあらかじめ決める必要がある．式 (2) と式 (3) を式 (1) に代入することで，劣化画像 $\boldsymbol{g}$ が与えられたときの事後確率分布は

$$P(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g}, \alpha, \beta) \propto \exp\left(\alpha \sum_{(i,j)\in E} f_i f_j + \beta \sum_{i\in V} g_i f_i\right) \tag{4}$$

と導かれる．

式 (4) からの原画像 $\boldsymbol{f}$ の推定には最大周辺事後確率推定（MPM 推定）を用いる．これは各頂点 i ごとに周辺事後確率分布

$$P_i(f_i|\boldsymbol{g}, \alpha, \beta) = \sum_{\boldsymbol{f}\backslash f_i} P(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g}, \alpha, \beta) \tag{5}$$

を最大化する f_i を頂点 i の推定値 $\hat{f}_i$ とするものである．しかしこの推定には多重和 $\sum_{\boldsymbol{f}\backslash f_i}$ の計算が必要であり，この和の計算量は頂点数の増加とともに指数的に増加してしまう．

2.2　確率伝搬法による近似

確率伝搬法とはメッセージ $\{\lambda_{ij}, \lambda_{ji}|(i,j) \in E\}$ をもちいて周辺確率分布を計算する近似アルゴリズムである．確率伝搬法を用いると式 (5) の周辺確率分布は

$$P_i(f_i|\boldsymbol{g}, \alpha, \beta) \propto \exp\left\{\left(\beta g_i + \sum_{j\in\partial i}\lambda_{ij}\right) f_i\right\} \tag{6}$$

と近似でき，メッセージは固定点方程式

$$\lambda_{ij} = \tanh^{-1}\left\{\tanh(\alpha)\tanh\left(\beta g_i + \sum_{k\in\partial j\backslash\{i\}}\lambda_{jk}\right)\right\} \tag{7}$$

の解として与えられる．ここで ∂i は頂点 i の隣接頂点の集合である．これにより式 (5) の多重和の問題は回避され，式 (6) から MPM 推定を行うことで頂点 i の推定値は

$$\hat{f}_i = \arg\max_{f_i} P_i(f_i|\boldsymbol{g}, \alpha, \beta) = \mathrm{sgn}\left(\beta g_i + \sum_{j\in\partial i}\lambda_{ij}\right) \tag{8}$$

となる．

2.3　性能評価

本講演では画像修復の結果を修復画像と原画像のあいだの規格化されたハミング距離

$$D(\hat{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{f}^*) \equiv \frac{1}{|V|}\sum_{i\in V}\left(1 - \delta_{\hat{f}_i, f_i^*}\right) \tag{9}$$

により評価する．ここで $\boldsymbol{f}^*$ は原画像である．(8) 式から $\hat{\boldsymbol{f}}$ は $\boldsymbol{g}$ と $\{\lambda_{ij}, \lambda_{ji}|(i,j) \in E\}$ の関数であるので評価関数 (9) 式の平均的なふるまいを調べるためにメッセージ λ_{ij} の分布を次の積分方程式の解として導入する．

$$P_{ij}(\lambda_{ij}) = \int dg_j Q_j(g_j) \prod_{k\in\partial j\backslash\{i\}} d\lambda_{jk} P_{jk}(\lambda_{jk})$$
$$\times\,\delta\left[\lambda_{ij} - \tanh^{-1}\left\{\tanh(\alpha)\tanh\left(\beta g_i + \sum_{k\in\partial j\backslash\{i\}}\lambda_{jk}\right)\right\}\right] \tag{10}$$

ここで $Q_i(g_i)$ は原画像 $\boldsymbol{f^*}$ が未知の場合と既知の場合について

$$Q_i(g_i) \equiv \begin{cases} \displaystyle\int \prod_{j\in V\backslash\{i\}} dg_j \sum_{\boldsymbol{f}} P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\beta^*)P(\boldsymbol{f},\alpha^*) \ (\text{未知の場合}) \\ \displaystyle\int \prod_{j\in V\backslash\{i\}} dg_j P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f^*},\beta^*) \ (\text{既知の場合}) \end{cases} \tag{11}$$

のように二通りに定義する．ここで α^*, β^* はハイパパラメータ α, β の真の値である．このメッセージの分布をつかうことで評価関数 (9) 式の平均的なふるまいは原画像が未知の場合は

$$[D]_{f,g} \equiv \frac{1}{|V|}\sum_{i\in V}\sum_{\boldsymbol{f}}\int d\boldsymbol{g}P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\beta^*)P(\boldsymbol{f},\alpha^*) \times \prod_{j\in\partial i} d\lambda_{ij}P_{ij}(\lambda_{ij})\left(1-\delta_{\hat{f}_i,f_i}\right) \tag{12}$$

とあらわされる．このとき同様に原画像が既知の場合は

$$[D]_g \equiv \frac{1}{|V|}\sum_{i\in V}\int d\boldsymbol{g}P(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f^*},\beta^*)\prod_{j\in\partial i} d\lambda_{ij}P_{ij}(\lambda_{ij})\left(1-\delta_{\hat{f}_i,f_i^*}\right) \tag{13}$$

とあらわされる．

2.4　数値実験

$\alpha^* = 0.465, \beta^* = 1$ として (10) 式の積分方程式を数値的に解き，$\beta = 1$ としてさまざまな α の値に対して得られる $[D]_{f,g}$ と $[D]_g$ の値をそれぞれ図 1，図 2 に与える． ここで $[D]_g$ の計算には原画像として図 3 の画像を用いた．

図 1 の結果は (2) 式の事前確率分布から生成されるすべての原画像に対して (3) 式の尤度での劣化を確率伝搬法で修復したときの平均的なふるまいである．この結果から α, β の値を真値付近に選ぶことができれば，今回の画像処理の確率モデルに対して確率伝搬法による修復が良好な結果を与えることがわかる．

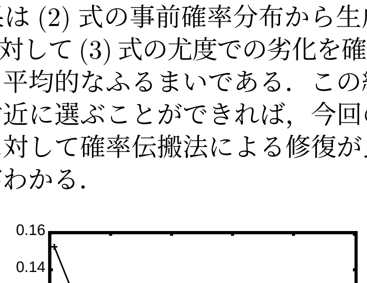

図 1: $\alpha^* = 0.465, \beta^* = 1$ として $\beta = 1$ と固定した場合の $[D]_{f,g}$ の α-依存性

一方，図 2 の結果は原画像が図 3 である場合に (3) 式の尤度での劣化を確率伝搬法で修復したときの平均的なふるまいである．実際の画像処理の場合，性能評価は原画像を具体的に与えて行うので工学的には $[D]_g$ の結果が重要であると考えられる．この結果から実際の画像に対しても原画像が事前確率分布 (2) 式から生成されると仮定する今回の確率モデルでの確率伝搬法での修復が良好な結果を与える最適点が存在することが分かる．このことは図 1 の結果とあわせて確率的画像処理においてパラメータ推定の重要性を意味している．

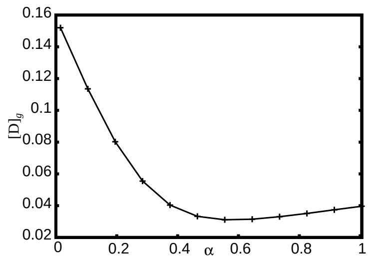

図 2: $\beta^* = 1$ として $\beta = 1$ と固定した場合の $[D]_g$ の α-依存性

図 3: $[D]_g$ の計算に用いた原画像

3　まとめ

原画像が未知である場合と既知である場合に対して確率伝搬法による画像処理アルゴリズムの性能評価を行った．今回は簡単のために二階調画像を用いたが今回の評価法は大階調画像の場合にも拡張可能である，また EM アルゴリズムによるハイパパラメータ推定法に対する統計的評価への拡張も今後に残された課題である．